Dérivation

I RAPPELLES

1 Dérivé en un point

Activité

Déterminer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ dans les cas suivants :

$f(x) = 3x^2 - x + 2$ et $a = -2$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$ et $a = 2$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 0$

$f(x) = |x|$ et $a = 0^+$ $\qquad$ $f(x) = |x|$ et $a = 0^-$

D **Définition**

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que la fonction f est **dérivable** en a si la limite $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l}$ où bien $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = l}$; $l \in \mathbb{R}$ (limite finie) est un **nombre réel**.

Dans ce cas on appellera cette limite le **nombre dérivé** de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

D **Définition**

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

♠ On dit que la fonction f est dérivable à droite en a si : $\boxed{\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l}$ $l \in \mathbb{R}$ (limite finie) et se note $f'_d(a)$.

♠ On dit que la fonction f est dérivable à droite en a si : $\boxed{\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l}$ $l \in \mathbb{R}$ (limite finie) et se note $f'_g(a)$.

Propriété

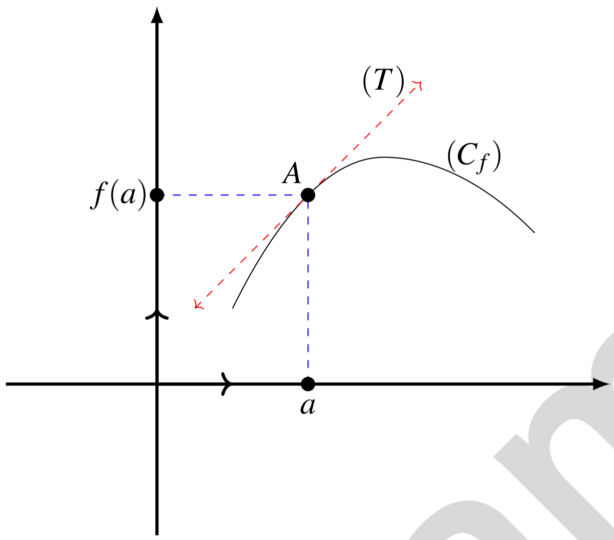
f est dérivable en a si est seulement si f est dérivable à droite en a, est dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$. c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Propriété

Si f est une fonction dérivable en a alors f est continue en a.

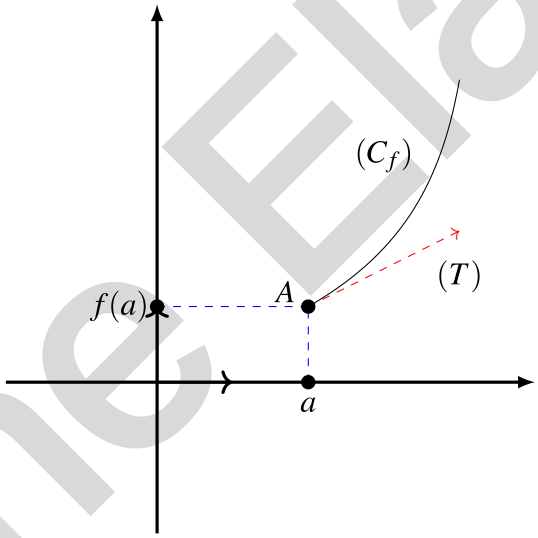
2 Interprétation géométrique du nombre dérivé

♣ Si f est dérivable en a alors (C_f) admet une tangente en $A(a; f(a))$ d'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.



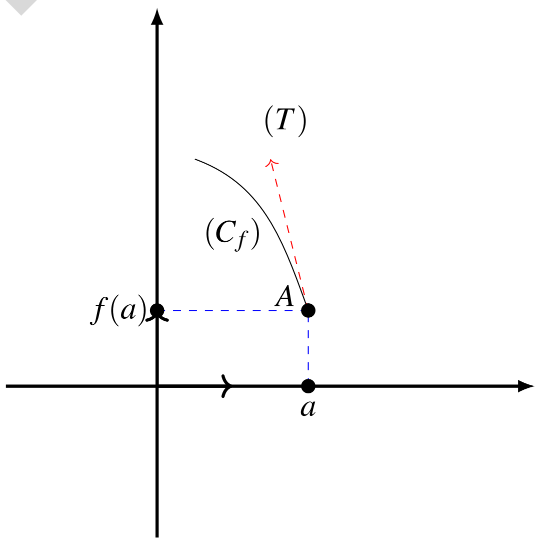
♣ Si f est dérivable à droite en a alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a; f(a))$ d'équation :

$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$



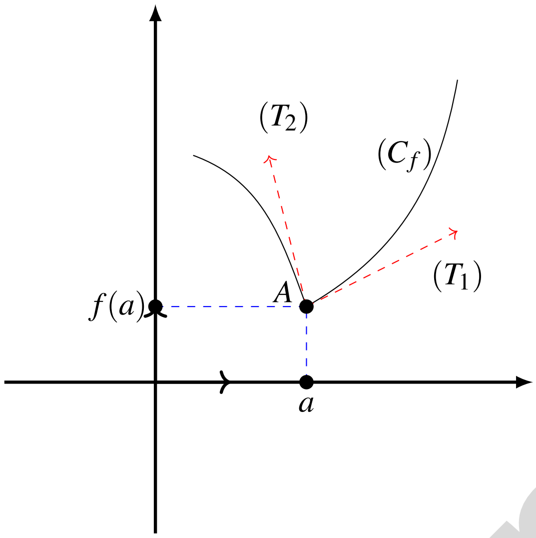
♣ Si f est dérivable à gauche en a alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a; f(a))$ d'équation :

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

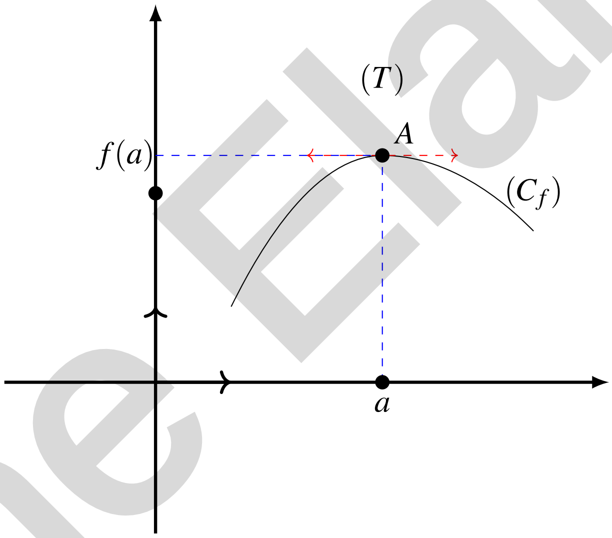


♣ Si f est dérivable à droite en a et à gauche en a et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$

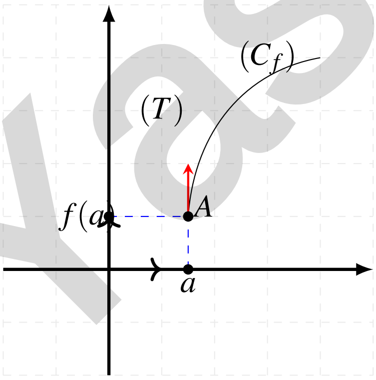
Alors $A(a; f(a))$ est un **point anguleux**



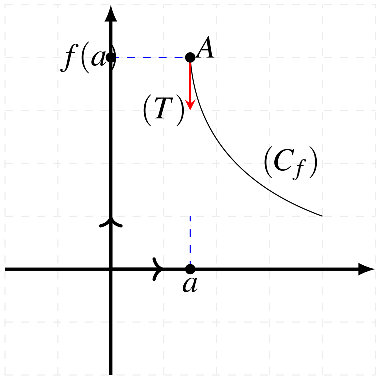
♣ Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ la courbe admet au point d'abscisse a une tangente horizontale d'équation : $y = f(a)$.



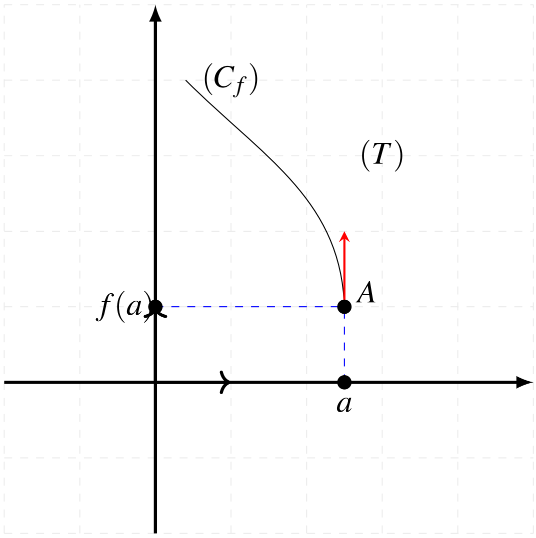
♣ Si $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite (à gauche) en a, Cependant, la courbe admet au point d'abscisse a une demi-tangente verticale.



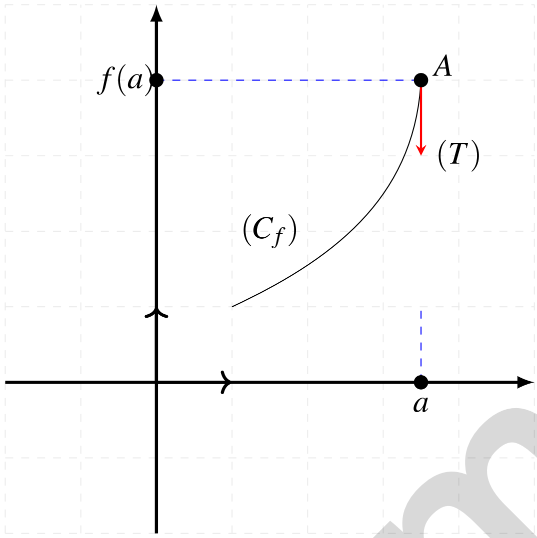
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$$



$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$$



$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$



$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$$

Application

Étudier la dérivabilité de f en a et donner une interprétation géométrique du résultat dans les cas suivantes :

1. $(a=1)$ et $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x};;x\geq 1 \\ f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4};;x<1 \end{cases}$
2. $(a=1)$ et $\begin{cases} f(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2};;0\leq x\leq 1 \\ f(x)=\sqrt{x^3-x};;x>1 \end{cases}$
3. $(a=0)$ et $\begin{cases} f(x)=3x^2+x;;x<0 \\ f(x)=-2x^2+3x;;x\geq 0 \end{cases}$

II Les opérations sur les fonction dérivées.

D Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

▶ On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

▶ On dit que f est dérivable sur $[a;b]$ si elle est dérivable sur $]a;b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Propriété

▶ Toute fonction **polynôme** est dérivable sur $\mathbb{R}$.

▶ Toute fonction **rationnelle** est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

▶ Les deux fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
▶ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

• Propriété

La fonction f	La fonction f'	f est dérivable sur I
$x \mapsto k;;(k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n;;(n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1};;(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto 1+\tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

a Opération sur les fonctions dérivées

• Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
★ Si $(\forall x \in I)$; $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) > 0$), alors la fonction f est croissante (strictement croissante) sur I.
★ Si $(\forall x \in I)$; $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$), alors la fonction f est décroissante (strictement décroissante) sur I.
★ Si $(\forall x \in I)$; $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I.

Application

Étudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2+3x-1$ 2) $f(x) = 4\sin(x)$ 3) $f(x) = x^4\cos(x)$
4) $f(x) = \sqrt{x}+x^3$ 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x) = \frac{6}{4x^2+3x-1}$
7) $f(x) = (x^2+1)^5$ 8) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ 9) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1 Dérivé et variations d'une fonction- extremums d'une fonction

• Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
★ Si $(\forall x \in I)$; $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) > 0$), alors la fonction f est croissante (strictement croissante) sur I.
★ Si $(\forall x \in I)$; $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$), alors la fonction f est décroissante (strictement décroissante) sur I.
★ Si $(\forall x \in I)$; $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I.

Propriété

f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local de la fonction f sur I.

III DÉRIVATION DE LA COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS

Activité

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \cos(x)$ $\qquad g(x) = x^2 - 2x$

1. Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $f'(x) \times g'(f(x))$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
3. On pose $h(x) = g \circ f(x)$.
   a. Déterminer $h(x)$ puis $h'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   b. Que remarquez-vous ?

T Théorème

Soient f est une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J tel que$f(I) \subset J$; et $a \in I$

- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur en a
- Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a :
  $\boxed{(\forall x \in I);;(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))}$

Application

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{4}{x^2+4}\right)$
2. $g : x \mapsto \sin\left(x^2 - \dfrac{2}{3}x + 4\right)$
3. $h : x \mapsto \tan(\cos(x))$

IV Dérivation de la fonction réciproque

Propriété

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I et $J = f(I)$ et $a \in I$.

- Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$.

  Et on a : $\boxed{(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}}$

► Si f est dérivable en y_0 et $f'(y_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $x_0 = f(y_0)$.

Et on a : $\boxed{(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}}$

Preuve

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. tel que $(\forall x \in I;; f'(x) \neq 0$
Sachant que : $(\forall x \in J);; (f \circ f^{-1})(x) = x)$
Donc : $(\forall x \in J);; (f \circ f^{-1})'(x) = (f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$
D'où : $(\forall x \in J);; (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

1. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2$
2. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$
4. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 , puis interpréter le résultat obtenu
   a. Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[)$ $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$
   b. Étudier les variations de f sur D_f, puis donner le tableau de variations de f
   c. Déterminer une équation cartésienne de la droite tangente de la courbe représentative de f au point d'abscisse 4
5. Soit g la restriction de fonction g sur l'intervalle $[1, +\infty[$
   a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}
   c. Montrer que la fonction g^{-1}est dérivable en 1, puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'(1)$
   d. Calculer $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt[3]{x} + g^{-1}(x) - \sqrt[3]{4} - 1}{x-4}$
   e. Calculer $g^{-1}(x)$ $(\forall x \in J)$

Application

soit f une fonction définie par : $f(x) = x^3 + x$

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et calculer $f(1)$.
3. Déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Application

soit f une fonction définie par : $f(x) = x^3 + x^2$

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ et calculer $f(1)$.
3. Déterminer $(f^{-1})'(2)$.

1 La dérivée de la racine n-ème

Propriété

Soit n un entier naturel non nul

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a $\boxed{(\forall x \in]0;+\infty[);;(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$
- Si f une fonction dérivable sur I et strictement positif sur I $(\forall x \in I;;f(x) > 0)$ alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et $\boxed{(\forall x \in I);;(\sqrt[n]{f(x)})' = \dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}}$

Application

Déterminer les domaines de dérivabilité les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt[3]{3x^2+x-4}$
2. $g(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2x-1}{x^2-x}}$