

Les racines carrées



racine carrée d'un nombre réel positif

1 Activités

Activité

En utilisant la calculatrice, ou non, remplir le tableau suivant :

x	0	1	144	0.64	$\frac{81}{49}$
$\sqrt{x}$	...	...	...	...	...

Activité

Remplir le vide par le nombre positif qui convient :

$$\begin{aligned}
 (\dots)^2 &= 9 & ; & & (\dots)^2 &= 7 & ; & & (\dots)^2 &= \frac{25}{36} & ; & & (\dots)^2 &= \sqrt{5} \\
 (\sqrt{5})^2 &= \dots & ; & & \left(\frac{4}{3}\right)^2 &= \dots & ; & & \left(\frac{-1}{8}\right)^2 &= \dots & ; & & (\dots)^2 &= \frac{\sqrt{3}}{16}
 \end{aligned}$$

2 Définition

Définition

Soit a un nombre réel positif non nul (c'est à dire : $a \geq 0$)

La racine carrée de a est le nombre réel positif dont le carré est égal à a noté $\sqrt{a}$

Résultat

Soit a un nombre réel positif

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

L'opposé de $\sqrt{a}$ (avec $a \neq 0$) est $-\sqrt{a}$

Remarque

- ★ $\sqrt{a}$ n'a pas de sens que si $a \geq 0$, c'est à dire que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas
- ★ La racine carrée d'un nombre n'est jamais égale à un nombre négatif.
- ★ $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$

EXEMPLES

★ $\sqrt{0} = 0$ car $0^2 = 0$.

★ $\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$.

★ $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$.

★ $\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$.

★ $\sqrt{81} = 9$ car $9^2 = 81$.

A apprendre par coeur ♥ (Carrés parfaits)

★ $\sqrt{0} = 0$

★ $\sqrt{1} = 1$

★ $\sqrt{4} = 2$

★ $\sqrt{9} = 3$

★ $\sqrt{16} = 4$

★ $\sqrt{25} = 5$

★ $\sqrt{36} = 6$

★ $\sqrt{49} = 7$

★ $\sqrt{64} = 8$

★ $\sqrt{81} = 9$

★ $\sqrt{100} = 10$

★ $\sqrt{121} = 11$

Application

★ $\sqrt{144} = \dots\dots$

★ $\sqrt{\frac{16}{25}} = \dots\dots$

★ $\sqrt{\frac{0.36}{0.25}} = \dots\dots$

★ $\sqrt{\frac{1}{9}} = \dots\dots$

★ $\frac{3}{\sqrt{81}} = \dots\dots$

★ $\sqrt{\frac{121}{94}} = \dots\dots$

Solution

★ $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

★ $\frac{3}{\sqrt{81}} = \frac{3}{\sqrt{9^2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

★ $\sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3^2}} = \frac{1}{3}$

★ $\sqrt{\frac{0.36}{0.25}} = \sqrt{\frac{0.6^2}{0.5^2}} = \frac{0.6}{0.5} = \frac{6}{5}$

★ $\sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{4^2}{5^2}} = \frac{4}{5}$

★ $\sqrt{\frac{121}{4}} = \sqrt{\frac{11^2}{2^2}} = \frac{11}{2}$

3

Le carré d'une racine carrée

Propriété

 a un nombre réel.

★ si $a > 0$; $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = a$

★ si $a < 0$; $\sqrt{a^2} = \sqrt{-a^2} = -a$

EXEMPLES

$$\star \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

$$\star \sqrt{(-3)^2} = 3$$

$$\star \sqrt{\left(\frac{-6}{7}\right)^2} = \frac{6}{7}$$

$$\star \sqrt{\sqrt{9}^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\star \sqrt{\frac{11^2}{5}} = \frac{11}{5}$$

$$\star \sqrt{\sqrt{2}^2} = \sqrt{2} = 2$$

Application

Simplifier ce qui suit :

$$\star \sqrt{\sqrt{16}}$$

$$\star \sqrt{\frac{\sqrt{2}^2}{7}}$$

$$\star \sqrt{7 + \sqrt{2}^2}$$

$$\star \sqrt{(7 + \sqrt{2})^2}$$

$$\star \sqrt{\sqrt{5}^2}$$

$$\star \sqrt{(-7 - \sqrt{5})^2}$$

Solution

$$\star \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{\sqrt{4^2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\star \sqrt{(7 + \sqrt{2})^2} = 7 + \sqrt{2}$$

$$\star \sqrt{\frac{\sqrt{2}^2}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{7}$$

$$\star \sqrt{\sqrt{5}^2} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$\star \sqrt{7 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{7 + 2} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$$

$$\star \sqrt{(-7 - \sqrt{5})^2} = -(-7 - \sqrt{2}) = 7 + \sqrt{2} \text{ car } -7 - \sqrt{2} < 0$$

Résolution de l'équation : $x^2 = a$ 1 Premier cas : $a > 0$ L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à :

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

$$x - \sqrt{a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \sqrt{a} = 0$$

$$x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}$$

2 Deuxième cas : $a = 0$ L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à :

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Cette équation admet l'unique solution 0.

3 Troisième cas : $a < 0$

L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution réel.

Règle

Solution de l'équation $x^2 = a$	
Si $a > 0$	L'équation admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
Si $a = 0$	L'équation admet une unique solution 0
Si $a < 0$	L'équation n'admet pas de solution

Application

Résoudre les équations suivantes :

$$2x^2 = 6 \quad ; \quad -13 + x^2 = -4 \quad ; \quad 3x^2 + 15 = 3 \quad ; \quad 2(x^2 - 1) = -2$$

Solution

★ L'équation $2x^2 = 6$ est respectivement équivalente à :

$$x^2 = \frac{6}{2}$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

Cette équation admet deux solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$

★ L'équation $-13 + x^2 = -4$ est respectivement équivalente à :

$$x^2 = -4 + 13$$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = 3^2$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Cette équation admet deux solutions -3 et 3

★ L'équation $3x^2 + 15 = 3$ est respectivement équivalente à :

$$3x^2 = 3 - 15$$

$$3x^2 = -12$$

$$x^2 = \frac{-12}{3}$$

$$x^2 = -4$$

Donc cette équation n'admet pas de solution

★ L'équation $2(x^2 - 1) = -2$ est respectivement équivalente à :

$$2x^2 - 2 = -2$$

$$2x^2 = -2 + 2$$

$$2x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{2}$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

La solution de cette équation admet est le nombre 0



Les opérations sur les racines carrées

1 Racine carrée et produit

a Propriété

Propriété

Soient a et b deux nombres réels positifs.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

EXEMPLES

$$\star \sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 6} = \sqrt{12}$$

$$\star \sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$\star \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times (-\sqrt{10}) = -\sqrt{2 \times 5 \times 10} = -\sqrt{100} = -10$$

$$\star \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

b Proposition

Proposition

Extraire un carré parfait

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls

$$\sqrt{a^2 \times b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$$

EXEMPLES

$$\star \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}$$

$$\star \sqrt{25 \times 7} = \sqrt{5^2 \times 7} = 5\sqrt{7}$$

$$\star \sqrt{49 \times 5} = \sqrt{7^2 \times 5} = 7\sqrt{5}$$

$$\star \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\star \sqrt{2^2 \times 5^2 \times 3} = 2 \times 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\star \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \times 5} = 5\sqrt{5}$$

$$\star \sqrt{3^2 \times 7} \times \sqrt{2^2 \times 3} = 3\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} = 3 \times 2\sqrt{7} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{7 \times 3} = 6\sqrt{21}$$

c Techniques et astuces (Décomposition)

Simplifions $\sqrt{180}$, pour cela, on décompose 180.

$$\begin{aligned} \text{Donc } 180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ \text{Donc } \sqrt{180} &= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} \\ &= 2 \times 3\sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

2 Racines carrées et puissances

$$\star A = \sqrt{5^6} = \sqrt{(5^3)^2} = 5^3 = 125$$

$$\star B = \sqrt{7^5} = \sqrt{7^4 \times 7} = \sqrt{(7^2)^2 \times 7} = 7^2 \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$$

Application

Simplifier et calculer :

$$\star a = \sqrt{\sqrt{3^4} \times 5^2 \times 2^7}$$

$$\star c = \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9}$$

$$\star e = (3\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$\star b = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$\star d = \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$$

Solution

$$\begin{aligned} \star a &= \sqrt{\sqrt{3^4} \times 5^2 \times 2^7} \\ a &= \sqrt{\sqrt{3^2}^2 \times 5^2 \times 2^6 \times 2} \\ a &= \sqrt{\sqrt{3^2}^2 \times 5^2 \times 2^{3 \times 2} \times 2} \\ a &= \sqrt{3^2 \times 5^2 \times (2^3)^2 \times 2} \\ a &= \sqrt{3^2 \times 5^2 \times 8^2 \times 2} \\ a &= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{8^2} \times \sqrt{2} \\ a &= 3 \times 5 \times 8 \times \sqrt{2} \\ a &= 120\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star c &= \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9} \\ c &= \sqrt{5^2} + \sqrt{9^2} - 2\sqrt{3^2} \\ c &= 5 + 9 - 2 \times 3 \\ c &= 5 + 9 - 6 \\ c &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star b &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \\ b &= \sqrt{4 + 9 + 36} \\ b &= \sqrt{49} \\ b &= \sqrt{7^2} \\ b &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star d &= \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54} \\ d &= \sqrt{16 \times 6} + 2\sqrt{4 \times 6} - 3\sqrt{9 \times 6} \\ d &= \sqrt{16}\sqrt{6} + 2\sqrt{4}\sqrt{6} - 3\sqrt{9}\sqrt{6} \\ d &= 4\sqrt{6} + 2 \times 2\sqrt{6} - 3 \times 3\sqrt{6} \\ d &= 4\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 9\sqrt{6} \\ d &= (4 + 4 - 9)\sqrt{6} \\ d &= -\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \star e &= (3\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - \sqrt{5}) \\
 e &= (3\sqrt{2})^2 - \sqrt{5}^2 \\
 e &= 3^2 \times \sqrt{2}^2 - 5 \\
 e &= 9 \times 2 - 5 \\
 e &= 18 - 5 \\
 e &= 13
 \end{aligned}$$

3 Racines carrées et division

Proposition

Soient a et b deux nombres réels positifs et $b \neq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

EXEMPLES

$$\star \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\star \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\star \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\star \frac{-\sqrt{60}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{\frac{60}{5}} = -\sqrt{12} = -\sqrt{4 \times 3} = -\sqrt{2^2 \times 3} = -\sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

Proposition

Soient a et b deux nombres réels positifs et $b \neq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

EXEMPLES

$$\star \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{\sqrt{4^2}} = \frac{1}{4}$$

$$\star \sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$\star \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\star \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\star \sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{35}}{5}$$

a Suppression de la racine carrée du dénominateur

(Rendre le dénominateur rationnel)

❶ cas 1 : Dénominateur ne contenant pas + ou -

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{5 \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{2 + \sqrt{7}}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}(2 + \sqrt{7})}{3 \times 11} = \frac{2\sqrt{11} + \sqrt{77}}{33}$$

❷ cas 2 : Dénominateur contenant + ou -

➤ Définition

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

➡ Le conjugué de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

➡ Le conjugué de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

➡ On dit que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sont conjugués entre eux.

EXEMPLES

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} &= \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})} \\ &= \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{\sqrt{2^2} - \sqrt{5^2}} \\ &= \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{2 - 5} \\ &= \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{-3} \\ &= -(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4 - \sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{3}(4 + \sqrt{6})}{(4 - \sqrt{6})(4 + \sqrt{6})} \\ &= \frac{\sqrt{3}(4 + \sqrt{6})}{4\sqrt{3} + \sqrt{18}} \\ &= \frac{4^2 - \sqrt{6^2}}{4\sqrt{3} + \sqrt{3^2 \times 2}} \\ &= \frac{16 - 6}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} \\ &= \frac{10}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} \end{aligned}$$