

Notion de logique

Séries des exercices

Exercice

Écrire en utilisant les quantificateurs logique , les propositions suivantes :

- 1 (R_1) : " Pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel m tel que $n = 2m$ "
- 2 (R_2) : " Pour tout réel x et y , il existe un entier naturel n tel que $x+y=n$ "
- 3 (R_3) : " Le carré de tout réel et positive "
- 4 (R_4) : " $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante "

Exercice

- 1 (P_1) : $(-3)^2 = 9$ et $\sqrt{9} = -3$
- 2 (P_2) : $(\pi \in \mathbb{Q})$ ou $(\sqrt{3} + \sqrt{7} > 3)$
- 3 (P_3) : $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 1)$
- 4 (P_4) : $(\exists x \in \mathbb{N} : 3n + 1 = 0)$

Exercice

Donner la négation des propositions suivantes :

- 1 (P) : $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2); (a^2 + b^2 \geq ab \text{ ou } |a| + |b| \geq |a+b|)$
- 2 (Q) : $(\exists x \in \mathbb{Z}); (x+1 > x)$
- 3 (R) : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow x = y$
- 4 (S) : $(\forall x \in \mathbb{N}^*); x \neq 1 \Rightarrow x \geq y$

Exercice

- 1 Montrer en utilisant la table de vérité que (Lois de MORGAN) :

a $\overline{(p \text{ et } q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ ou } \bar{q})$

b $\overline{(p \text{ ou } q)} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ et } \bar{q})$

- 2 Montrer que : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ ou } q)$
- 3 On déduire que : $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \text{ et } \bar{q})$

Exercice

- 1 On considère la proposition P suivants : $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + xy + y^2 = 0$
 - a Donner la négation de P .
 - b Montrer que P est fausse
- 2 On considère la proposition R suivants : $(\forall x \in [0, 2])(\exists y \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]) : xy - x + 2y - 1 = 0$
 - a Donner la négation de P .
 - b Montrer que P est vraie
- 3 On considère la proposition Q suivants : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : y^2 - 3xy^2 + 2x^2 = 1$
 - a La proposition Q est elle vraie ? Justifier votre réponse
 - b Déterminer la négation de la proposition Q

Exercice

- 1 Montrer que : $x \neq 5 \Rightarrow \frac{x+3}{x-3} \neq 4, \forall x \neq 3$
- 2 Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+) : a \neq b \Rightarrow \frac{a^2+5}{a^2+2} \neq \frac{b^2+5}{b^2+2}$
- 3 Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : (xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$

Exercice

Montre les implications suivants :

- 1 $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*) : 2x + y = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 20$
- 2 $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) : [|a-b| \leq c \text{ et } |a+b| \leq c] \Rightarrow |ab| \leq \frac{c^2}{2}$
- 3 $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) : a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ et } c > 0 \Rightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$

Exercice

Montre les équivalences suivants :

- 1 $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$

2 $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 1}{5}} \geq \sqrt{x}$

3 Montrer que $\forall x, y \in]1, +\infty[$ on a $x + y + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} > 2$

Exercice

1 Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x + 1$, Montrer que f ni paire ni impaire

2 Montrer que la proposition $P : (\forall x \in \mathbb{R}) : 3\cos x \neq 2\sin^2 x$ est une proposition fausse

3 Montrer que la proposition : Tout entier naturel divisible par 2 et par 6 est divisible par 12 est fausse

Exercice

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ on a $4|n^2$ ou $4|n^2 - 1$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 - |x - 3| - 4 = 0$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} 2|x+1| - y = 4 \\ |x+2| + 2y = 6 \end{cases}$$

Exercice

1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$

2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* - 1 ; 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$

6 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} , 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

7 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* , 3$ divise $3^n + 4^n - 1$

8 Soit x un réel strictement positif Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+n)^n \geq 1+nx$

a En déduire que $\forall x \in \mathbb{N}^*, \text{on a } 3^n > n$

b En déduire que $\forall x \in \mathbb{N}^*, \text{on a } (n+1)^n \geq 2n^n$