Cours 1ECO

Chapitre

Notion de logique

Recommandations pédagogiques

1. On approchera les propositions, les lois logiques et les méthodes de raisonnement, à partir d'activités variées et diverses, issues des acquis de l'élève et de situations déjà rencontrées.
2. On évitera toute construction théorique et toute utilisation excessive de tableaux de vérité.
3. Les résultats concernant la logique devront être exploités à tout moment opportun dans les différents chapitres du programme.

Capacités attendues

1. Transformer un énoncé mathématique en écriture symbolique en utilisant les connecteurs et les quantificateurs logiques et inversement
2. Utiliser le type de raisonnement convenable selon la situation étudiée
3. Rédiger des raisonnements et des démonstrations mathématiques claires et logiquement correctes.

Contenus

1. Propositions ; opérations sur les propositions ; fonctions propositionnelles.
2. Les quantificateurs ; les propositions quantifiées ; les lois logiques.
3. Les raisonnements mathématiques : raisonnement par l'absurde ; raisonnement par contraposée.
4. raisonnement par disjonction des cas ; raisonnement par équivalence ; raisonnement par récurrence.

I Assertion -proposition - Fonction propositionnelle :

1 Notion d'assertion

Activité

Répondre par vraie ou faux :

1. Tout nombre paire est divisible par 4
2. La somme de deux nombres impairs est un nombre pair
3. $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel
4. La fonction $f(x) = x^2$ est une fonction paire

Définition

Une assertion (= proposition) est une phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une et une seule valeur de vérité, à savoir vrai (V en abrégé) ou faux (F en abrégé) et elle est généralement désignée par une lettre : P, Q, R ou S . . .

Remarque

On désigne par V ou 1 la valeur de vérité d'une proposition vraie , et par F ou 0 la valeur de vérité d'une assertion fausse

Définition

Soit P une assertion. On affecte à P le nombre 1 si elle est vraie et 0 si elle est fausse. On schématise ce fait par : un tableau appelé table de vérité de P :

P
1
0

ou

P
V
F

Exemple

1. P : " La somme de deux entiers consécutifs est un nombre impair " est une assertion vraie.
2. Q : " Le nombre π est rationnel " est une assertion fausse.
3. R : " L'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ " c'est une assertion vraie car $\Delta > 0$.
4. $S(m,n)$: " $(m;n) \in \mathbb{N}^2; m - n = 5$ " n'est pas une assertion car on ne peut dire s'il est vrai ou faux.

Application

Déterminer la valeur de vérité de chacun des propositions suivantes :

- ☐ P : " $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{7}{5}$ ".
- ☐ Q : " $cos(\dfrac{\pi}{7}) > 1$ ".
- ☐ R : " $\sqrt{3+\sqrt{5}} \times \sqrt{3-\sqrt{5}} \in \mathbb{N}$ ".
- ☐ R : " Les solutions de l'équation $2023x^2 - 2024x + 1 = 0$ sont 1 et -3 ".

2 Fonction propositionnelle

Activité

On considérer l'expression (C) : "$(x \in \mathbb{R}); x^2 - x \geqslant 0$"

1. L'expression $C(x)$ est-elle vraie pour : $x = 2$; $x = \dfrac{1}{2}$; $x = -1$; $x = \dfrac{2}{5}$
2. Que peut-on déduire ?

Définition

On appelle une **fonction propositionnelle** toute phrase ou énoncé mathématique dépendant d'une (ou plusieurs) variable appartenant à un ensemble donné; elle peut être une assertion lorsque on substitue cette variable par un élément déterminé de cet ensemble .
Selon le nombre de variables , une **fonction propositionnelle** est généralement désignée par : $P(x)$, $Q(x;y)$ ou $R(x;y;z)$ . . . etc

Exemple

1. $P(x) : (x \in \mathbb{N}); x^2 + x = 2$ est une fonction propositionnelle.
   On a $P(1)$ est une assertion vraie et $P(0)$ est une assertion fausse.
2. $P(a;b) : (a \in \mathbb{R})(b \in \mathbb{R}); a^2 + b^2 = 2$ est une fonction propositionnelle.
   On a $P(-1;1)$ est une assertion vraie et $P(0;2)$ est une assertion fausse.

II Les quantificateurs Logique :

1 Quantificateur universel - Quantificateur existentiel

Activité

Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux fonctions proportionnelles telle que :

$$A(x): "(x \in \mathbb{R}); x^2 + x + 1 > 0 \quad \text{et} \quad B(x): "(x \in \mathbb{R}); x^2 + 2x - 3 = 0$$

1. Est ce que $A(x)$ est vraie pour tous les nombres réel ? justifier .
2. Vérifier que $B(x)$ est vraie pour certains valeurs de x (On prend $x = 1$ ou $x = -3$) et fausse pour d'autre valeurs $(x = 0)$

Définition

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle d'une variable x d'un ensemble E.
À partir de la fonction propositionnelle $''(x \in E), P(x)''$, on définit :

1. L'assertion $''(\exists x \in E), P(x)''$ qui se lit : "il existe au moins $x \in E$ tel que $P(x)$".
Elle est vraie lorsqu'il existe au moins $x \in E$ vérifiant la propriété $P(x)$.
Le symbole $\exists$ s'appelle **le quantificateur existentiel** .
2. L'assertion $''(\exists ! x \in E), P(x)''$ qui se lit : "il existe un et unique $x \in E$ tel que $P(x)$".
Elle est vraie lorsqu'il existe un et unique $x \in E$ vérifiant la propriété $P(x)$.
3. L'assertion $''(\forall x \in E), P(x)''$ qui se lit :
"pour tout $x \in E$ on a $P(x)$ " ou "quel que soit $x \in E$ on a $P(x)$ ".
Elle est vraie lorsque tous les éléments de E vérifient la propriété $P(x)$.
Le symbole $\forall$ s'appelle **le quantificateur universel** .

Exemple

1. Soit P : " Il existe un réel x tel que $x^2 = 1$".
Écriture formalisée : P : $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$.
Valeur de vérité : P est vraie car le nombre réel $x = -1$ vérifie l'égalité $x^2 = 1$.
2. Soit Q : " Pour tout réel positif x, on a $x^2 \geq x$".
Écriture formalisée : Q : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 \geq x$
Valeur de vérité : Le nombre réel $x = \dfrac{1}{2}$ ne vérifie pas l'inégalité $x^2 \geq x$. Alors Q est fausse.
3. Soit R : " Pour tout réel x non nul, il existe un réel y tel que $xy = 1$".
Écriture formalisée : R : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\exists y \mathbb{R}),\ xy = 1$
Valeur de vérité : Soit $x \in \mathbb{R}^*$; en considérant $y = \dfrac{1}{x}$ on obtient $x \times \dfrac{1}{x} = 1$. D'où R est vraie .
4. Soit S :$''$ $(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = -1''$.
S est une assertion fausse car aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif.
5. Soit T :$''$ $(\exists ! x \in \mathbb{R}^*); x^2 = -x''$.
T est une assertion vraie car l'équation $x^2 = -x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.

2 Assertions à plusieurs quantificateurs :

Exemple

1. L'assertion : " pour chaque entier naturel, on peut trouver un entier naturel strictement plus grand " peut s'écrire sous forme : $(\forall n \in N)(\exists m \in N),\ m > n.$
(cette assertion est vraie)
2. L'assertion : " il y a un entier naturel plus grand que tous les entiers naturels" peut s'écrire sous forme : $(\exists m \in N)(\forall n \in N),\ m > n.$
(cette assertion est fausse)

Remarque

L'ordre d'écriture des quantificateurs est fondamental pour le sens d'une phrase formelle :

1. On peut permuter des quantificateurs de même nature.
2. On ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

Exemple

1. Voici une phrase vraie " Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone ", bien sûr le numéro dépend de la personne.
2. Par contre cette phrase est fausse : " Il existe un numéro, pour toutes les personnes". Ce serait le même numéro pour tout le monde !

Application

Écrire les propositions suivant a l'aide des quantificateurs logique :

1. P : " tout réel inférieur au égal a 1 et négatif ".
2. Q : " L'équation $x^2 - 2x + 3 = 0$ admet au moins une racine réel ".
3. R : " pour tout réel x , il existe un entier naturel n tel que $x < n$ ".
4. S : " il n'existe aucun rationnel solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$ ".

III Les connecteurs logiques - Opération sur les propositions :

Définition

Un connecteur logique est une opération qui à deux assertions associe une troisième.

1 Négation d'une assertion :

Activité

Ahmed et Jawad jouent à un jeu qui consiste à ce qu'Ahmed doive dire l'opposé de tout ce que Jawad dit. Voici les paroles de Jawad, donnez ce qu'Ahmed doit dire.

1. $\sqrt{2}$ est un entier naturel
2. 4 est nombra pair
3. $\sqrt{2}+3=2$
4. 20 et un multiple de 5
5. l'ensemble des nombres impairs est finie

Définition

Soit P une assertion, la négation de P est l'assertion notée $\overline{P}$, $\neg P$ ou non(P) ; elle est vraie si et seulement si P est fausse, comme le montre la table de vérité du connecteur $\overline{P}$:
Remarque : $\overline{\overline{P}}$ et P ont la même valeur de vérité

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

Exemple

1. P : " $3 \in Z$" alors $\overline{P}$: " $3 \notin Z$".
2. Q : " $3+5=8$" alors $\overline{Q}$: " $3+5 \neq 8$"
3. R : " $3 \times 8 < 10$" alors $\overline{R}$: " $3 \times 8 \geq 10$".
4. S : "$\{3;8;10\} \subset N$" alors $\overline{S}$: " $\{3;8;10\} \not\subset N$".

Propriété

Intuitivement :

1. La négation de "Tous les éléments de l'ensemble E vérifient la propriété P" est "Il y a au moins un élément de E qui ne vérifie pas P".
2. La négation de "Il y a au moins un élément de E pour lequel la propriété P est vraie" est "Pour tous les éléments de E, la propriété P est fausse".

Formellement :

1. La négation de " $(\forall x \in E)$, on a $P(x)$" est " $(\exists x \in E)$ tel que $\overline{P(x)}$".
2. La négation de "$(\exists x \in E)$ tel que $P(x)$" est "$(\forall x \in E)$, on a $\overline{P(x)}$".

Remarque

1. La règle à retenir est la suivante :
Pour nier une expression commençant par "il existe" on transforme le "il existe" en "pour tout" et on nie ce qui suit.

Pour nier une expression commençant par "pour tout", on transforme le "pour tout" en "il existe" et on nie ce qui suit.

2. $(\exists\,!\, x \in E)\,;\mathrm{P(x)} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in E\,;\mathrm{P(x)}\,)$ et $(\forall y \in E\,;\mathrm{P(y)}) \Rightarrow \mathrm{y=x}\,)$
Alors la négation de $(\exists\,!\, x \in E)\,;\mathrm{P(x)}$" c'est : $(\forall x \in E\,;\overline{P(x)}\,)$ ou $(\exists y \in E\,;\mathrm{P(y)}$ et $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}\,)$

3. Pour déterminer la négation d'une proposition il faut déterminer la négation de Certains Symboles :

Le symbole	$=$	$>$	$<$	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\neq$	$\leqslant$	$\geqslant$	$\notin$	$\not\subset$	$\exists$
la négation	$\neq$	$\leqslant$	$\geqslant$	$\notin$	$\not\subset$	$\exists$	$=$	$>$	$<$	$\in$	$\subset$	$\forall$

Exemple

a) On a : P : "pour tout entier naturel n, on a $n^2 \geq n$".
Alors $\overline{P}$: "il existe au moins un entier naturel n tel que $n^2 < n$".

b) On a : Q : "Il existe au moins un réel x tel que $x^2 = 0$". Alors $\overline{Q}$:"Pour tout réel x, $x^2 \neq 0$".

c) On a : $R : \forall x \in R, \exists y \in R, x+y=0$. Alors $\overline{R} : \exists x \in R, \forall y \in R, x+y \neq 0$

Conséquence

Pour Montrer que la proposition $(\forall x \in E); p(x)$ est fausse ; il suffit de montrer que sa négation $(\exists x \in E); \overline{p(x)}$ est vraie . ce type de raisonnement est appelé raisonnement par contre exemple

Application

Donner la négation des propositions suivantes

1. P : " $(\forall x \in \mathbb{R})\,; x^2+2x-3>0$ ".
2. Q : " $(\exists n \in \mathbb{N})\,; \sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}$ ".
3. R :" $(\forall y \geqslant 0)\ (\exists x \in \mathbb{R})\,; y = x^2$".

Exercice

Montrer que la proposition " $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,; x+\sqrt{x} \geqslant 2$ " est fausse.

2 Conjonction et Disjonction de deux propositions

Activité

Recopier les expressions suivantes et les compléter par l'un des liens logiques suivants : " ou " ou " et "

1. $x(x-1)=0$ signifie que : $x=0$ .... $x=1$.
2. ABCD est un losange signifie que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ..... $AB = BC$

3 Sot x un réel , on a : $|x| = x$ .....$|x| = -x$

4 Sot x un réel ,$|x| < 1$ signifie que : $1 > x$ .....$-1 < x$

a Conjonction de deux propositions

Définition

La conjonction est un connecteur logique qui à deux assertions (P et Q) associe l'assertion $(P \wedge Q)$ appelée la conjonction de P et Q et qu'on lit (P et Q) définie par la table de vérité ci-contre

P	Q	$(P \wedge Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Notez Bien :

On dit que (P et Q) est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont vraies

Remarque

1 La conjonction (P et Q) et (Q et P) ont le même sens on dit que la conjonction est une opération commutative

2 les propositions $[(P \text{ et } Q) \text{ et } R]$ et $[P \text{ et } (Q \text{ et } R)]$ ont le même sens on dit que la conjonction est une opération Associative

Exemple

1 P : " $5+2=7$ et $2 \times 5 < 11$ " est une proposition vraie.

2 Q : " $\{5; \frac{1}{5}\} \subset N$ et $2 \times 5 = 10$ " est une proposition fausse.

3 R : " $\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{9}}$ et $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$" est une proposition fausse

Exemple

P	Q	la vérité de P	la vérité de Q	la vérité $(PetQ)$
7 est un nombre impair	4 est un nombre premier	1	0	0
3 divise 17	25 est un multiple de 7	0	0	0
5 est négatif	12 est positif	0	1	0
$2+3=5$	$\exists x \in R, x < 0$	1	1	1

b Disjonction de deux propositions

Définition

La disjonction est un connecteur logique qui à deux assertions P et Q associe l'assertion $(P \vee Q)$ qu'on appelle la disjonction de P et Q et qu'on lit (P ou Q) définie par la table de vérité ci-contre

P	Q	$(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Notez Bien :
On dit que (P ou Q) est faux si et seulement si les deux propositions P et Q sont faux

Exemple

P	Q	la vérité de P	la vérité de Q	la vérité $(PouQ)$
7 est un nombre impair	4 est un nombre premier	1	0	1
3 divise 17	25 est un multiple de 7	0	0	0
5 est négatif	12 est positif	0	1	1
$2+3=5$	$\exists x \in R, x<0$	1	1	1

Remarque

1. La proposition (P ou Q) et (Q ou P) ont le même sens on dit que la disjonction est une opération commutative
2. les propositions $[(P\ ou\ Q)\ ou\ R\ ]$ et $[P\ ou\ (Q\ ou\ R)]$ ont le même sens on dit que la disjonction est une opération Associative

Exercice

Soit P une proposition , Montrer que ($\overline{\overline{P}\ ou\ P}$) est fausse.

3 Implication et Équivalence de deux propositions

a Implication de deux propositions

Activité

Étudier la valeur de vérité des deux propositions suivants :

1. Si ABC est un triangle rectangle en A alors on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$
2. Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors on a ABC est un triangle rectangle en A

Définition

L'implication est un connecteur logique qui à deux assertions P et Q associe l'assertion notée $(P \Rightarrow Q)$ et dont la valeur de vérité est celle de l'assertion $(\overline{P} \vee Q]$ on lit : "P implique Q" ou "si P alors Q". $(P \Rightarrow Q)$ est alors définie par la table de vérité ci-contre.

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Notez Bien :
On dit que $(P \Rightarrow Q)$ est faux si et seulement si P et vraie et Q est faux (L'ordre est important)

Remarque

1. L'implication $P \Rightarrow$ Q est appelé l'implication réciproque de Q $\Rightarrow$ P
2. Les deux implications $P \Rightarrow$ Q et Q $\Rightarrow$ P n'ont pas le même sens c'est pour cela on dit que l'implication est une opération non commutative

• Exemple

P	Q	la vérité de P	la vérité de Q	la vérité $(P \Rightarrow Q)$
7 est un nombre impair	4 est un nombre premier	1	0	0
3 divise 17	25 est un multiple de 7	0	0	1
5 est négatif	12 est positif	0	1	1
$2+3=5$	$\exists x \in R, x<0$	1	1	1

Remarque

La transitivité de l'implication :
Soient P , Q et R trois propositions on a : $(P \Rightarrow Q \; et \; Q \Rightarrow R) \Rightarrow P \Rightarrow R$

Application

1. Soient x et y deux réels non nuls , Montrer que $2x+4y=1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2} \leqslant 20$
2. Soient a et b deux réels ; Montrer que : $a^2+b^2=1 \Rightarrow |a+b| \leqslant \sqrt{2}$
3. Soient a et b deux réels ; Montrer que : $(|a|<1$ et $|b|<1) \Rightarrow |a+b| < |1+ab|$

b Condition suffisante - Condition nécessaire

Il s'agit d'une autre façon d'exprimer les implications .Les phrases suivantes ont le même sens :

1. P $\Rightarrow$ Q
2. Pour que la proposition P est Vraie , il faut que la proposition Q est vraie .
3. Q est une condition nécessaire pour que la proposition P soit vraie

4 Pour que la proposition Q est vraie ,il suffit que la proposition P est vraie

5 P est une condition suffisante pour que la proposition Q soit vraie .

La même implication peut donc s'écrit :

1 Soit comme une condition suffisante :

Pour que la conclusion soit vraie , il suffit que l'hypothèse soit vraie .

2 Soit comme une condition nécessaire :

Pour que l'hypothèse soit vraie ,il faut que la conclusion soit vraie .

• Exemple

On sait que l'implication suivante est vraie :

ABC est un triangle équilatéral $\Rightarrow$ ABC est un triangle isocèle

a) La condition ABC est un triangle équilatéral est suffisante pour que le triangle ABC soit isocèle

b) La condition ABC est un triangle isocèle est nécessaire pour que le triangle ABC soit équilatéral

c Équivalence de deux propositions

Activité

On considèrent $H(x) : ax^2 + bx + c = 0$, avec $(a \neq 0)$, b et c des réel
Soit P et Q deux propositions tel que :
P : "H admet deux solution de signe différent " et Q : "$ac < 0$"

1 Montrer que P $\Rightarrow$ Q

2 Montrer que Q $\Rightarrow$ P

NB : on a montrer que P $\Rightarrow$ Q et que Q $\Rightarrow$ P on note cela par P $\Leftrightarrow$Q et on dit que :
P est équivalente a Q

Définition

L'équivalence logique est un connecteur logique qui à deux assertions P et Q associe l'assertion notée $(P \Leftrightarrow Q)$ et dont la valeur de vérité est celle de l'assertion $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$ on lit : P équivalent à Q ou P si et seulement si Q
$(P \Leftrightarrow Q)$ est alors définie par la table de vérité ci-contre.

P	Q	$(P \Leftrightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Notez Bien :
On dit que $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie si et seulement si P et Q est on la même valeur de vérité

• Exemple

P	Q	la vérité de P	la vérité de Q	la vérité $(P \Leftrightarrow Q)$
7 est un nombre impair	4 est un nombre premier	1	0	0
3 divise 17	25 est un multiple de 7	0	0	1
5 est négatif	12 est positif	0	1	0
$2+3=5$	$\exists x \in R, x<0$	1	1	1

Remarque

1. La proposition ($P \Leftrightarrow Q$) et ($Q \Leftrightarrow P$) ont la même valeur de vérité , on dit que l'équivalence est une opération commutative
2. Soient P , Q et R trois propositions alors on a : $[P \Leftrightarrow Q \; et \; Q \Leftrightarrow R] \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$, on dit que l'équivalence est une opération transitive

Proposition

1. $[\,(\forall x \in E) \;\; A(x) \; et \; B(x)\,] \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in E) \;\; A(x) \quad \text{et} \quad (\forall x \in E) \;\; B(x)$
2. $[\,(\exists x \in E) \;\; A(x) \; ou \; B(x)\,] \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in E) \;\; A(x) \quad \text{ou} \quad (\exists x \in E) \;\; B(x)$

Remarque

La proposition : $[\,(\exists x \in E) \;\; A(x) \; et \; B(x)\,] \;\; \Leftrightarrow \;\; (\exists x \in E) \;\; A(x) \;\; \text{et} \;\; (\exists x \in E) \;\; B(x)$ n'est pas toujours vraie comme le montre l'exemple suivante :
Considerons les deux proposition suivantes :
P : $[(\exists x \in R) \;\; cos(x) = 0 \; et \; (\exists x \in R) \;\; sin(x) = 0]$ et Q : $[(\exists x \in R) \;\; cos(x) = 0 \; et \; sin(x) = 0]$
La proposition P est vraie car $cos(0) = 0$ et $sin(\frac{\pi}{2}) = 0$, Dans les deux affirmations : $(\exists x \in R) \;\; cos(x) = 0$ et $(\exists x \in R) \;\; sin(x) = 0$ la lettre x ne désigne pas forcément un même nombre .
La proposition Q est évidement fausse car pour tout x de R on a $cos^2x + sin^2x = 1 \neq 0$

Application

1. Soient a et b deux réels positifs , Montrer que $a^2 + b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{\not\in}$ tel que $x > 1$ et $y \geq 4$ Montrer que
$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (x = 2 \;\; et \;\; y = 8)$$

Proposition

Soient P,Q,R trois assertions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \;\; \Leftrightarrow \;\; non \; (non \; (P))$

2. $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$
3. $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$
4. $\text{non } (P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
5. $\text{non } (P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
6. $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
7. $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
8. $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \text{non } (Q) \Rightarrow \text{non}(P)$

EXEMPLES

Utiliser les tableaux de vérité

IV Les lois logiques

1 La loi logique

Définition

Les lois logiques sont des assertions formées de plusieurs assertions P, Q, R ... , liées entre elles par les connecteurs logiques et qui sont toujours vraies quelque soit la valeur de vérité des assertions P, Q, R ...

• Exemple

Montrer que la proposition $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ est une loi logique
Réponse :

P	Q	$(Q \Rightarrow P)$	$p \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

La proposition $p \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est toujours vraies quelles que soient les valeurs de vérité des proposition P et Q , par suite $p \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est une loi logique .

2 La lois de MORGAN

Propriété

Soit p et q deux proposition . Les deux propositions suivantes sont les lois de morgan

$$\overline{(P\vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\wedge\overline{Q}) \quad \text{et} \quad \overline{(P\wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\vee\overline{Q})$$

Exemples

P	Q	$(QouP)$	$\overline{(QouP)}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}et\overline{Q}$	$\overline{(QouP)} \Leftrightarrow \overline{P}et\overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Application

Déterminer la négation des propositions suivantes :

1. $(P \Rightarrow Q)$ *et* $(P \Leftrightarrow Q)$
2. $(\exists x\in\mathbb{R})$, $0 \leqslant x < 1$
3. $(\forall x\in\mathbb{R})$, $x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Propriété

Soit P , Q et R trois propositions .les deux propositions suivantes sont des lois logiques (La distributivité) :

1. P et (P ou R) $\Leftrightarrow$ (P et Q) ou (P et R)
2. P ou (P et R) $\Leftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R)

Application

1. Développons $(x-1)(y-2)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} xy - y + 2 - 2x &= 0 \\ x^2y - (y^2+1)x + y &= 0 \end{cases}$

Propriété

1. $(P\wedge Q) \Leftrightarrow (Q\wedge P)$
2. $[(P\wedge Q)\wedge R)] \Leftrightarrow [P\wedge(Q\wedge R)]$
3. $(P\vee Q) \Leftrightarrow (Q\vee P)$
4. $[(P\vee Q)\vee R)] \Leftrightarrow [P\vee(Q\vee R)]$
5. $[P\vee(Q\wedge R)] \Leftrightarrow [(P\vee Q)\wedge(P\vee R)]$
6. $[P\wedge(Q\vee R)] \Leftrightarrow [(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)]$

EXEMPLES

Utiliser le tableau de vérité

V Les grands types de raisonnement mathématiques :

1 Le Raisonnement direct

Définition

Si on a l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et on a dans un exercice comme donnée la proposition P donc on déduit que la proposition Q est vraie . Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par par déduction .

Exercice

Montrer que si $a,b \in Q$ alors $a+b \in Q$.
Réponse :

Prenons $a,b \in Q$. Alors $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$ $a+b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+qp'}{qq'}$
Or r le numérateur $pq'+qp'$ est bien un élément de Z ; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$
Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{N}^*$, Ainsi $a+b \in Q$.

2 Le raisonnement par équivalences successives

Propriété

Soient P, Q et R trois assertions. On a : $[(P \Leftrightarrow R) \wedge (R \Leftrightarrow Q)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$

Pour ce type de raisonnement , on passe de P à Q (Ou de Q à P), en utilisant à chaque fois des équivalences . cette méthode et plus courte mais plus fastidieuse puisqu'on doit vérifier que chaque enchainement logique de la démonstration est bien une équivalence et pas seulement une implication.

Exemple

1. Montrer que : $(\forall (a;b) \in R^+ \times R^+) ; a+b=0 \Leftrightarrow a=0 \wedge b=0$.
2. En déduire que : $\left(\forall (x;y) \in R^2\right) ; \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0$

3 Le Raisonnement par contre exemple

Définition

Pour prouver que la propriétés suivante est fausse :$\forall x \in E$, $P(x)$ il suffit de prouver que $\exists x \in E$, $\overline{P(x)}$ est vraie (c.à.d. de trouver un élément x de E qui ne vérifie pas $P(x)$ ce qu'on appelle contre exemple

Exemple

Est ce que la somme de deux nombres irrationnelle est un nombre irrationnelle ?
Or on a $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux nombres irrationnelle mais leur somme$-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$ n'est pas un nombre irrationnelle .

4 Le raisonnement par disjonction des cas

Propriété

Soient P, Q et R trois assertions. Le raisonnement par par disjonction des cas ce basé sur la loi logique suivant : $[(P\vee Q)\Rightarrow R]\Leftrightarrow[(P\Rightarrow R)\wedge(Q\Rightarrow R)]$

Remarque

Si l'on souhaite vérifier une propriété $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre la propriété pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de disjonction ou du cas par cas.

Exemple

Montrer que pour tout entier naturel on a $n(n^2+5)$ est un nombre pair.

Application

1. Montrer que : $(\forall n \in N)$; $n\left(n^2+5\right)$ est paire.
2. Montrer que : $(\forall n \in N)$; $n\,(n+1)$ est paire.
3. Résoudre dans R l'équation suivante : $x^2-3|x|+2=0$.
4. Résoudre dans R l'équation suivante : $x^2-3|x-2|-4=0$.
5. Montrer que $(\forall n \in N)$; on a $\sqrt{x^2+1}-x>0$

5 Le raisonnement par l'absurde

Propriété

Soient P et Q deux assertions. Le raisonnement par absurde ce basé sur la loi logique suivant :
$$[\,(\overline{P} \Rightarrow Q\,) \wedge (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}\,)\,] \Rightarrow P$$

Remarque

On veut montrer qu'une assertion P est vraie. On suppose que c'est sa négation $\overline{P}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une assertion fausse. On en conclut que P est vraie (puisque Q est fausse, l'implication $\overline{P} \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\overline{P}$ est fausse ou encore si P est vraie).

Exercice

Montrer que : $\sqrt{2} \notin Q$.

Application

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $\sqrt{1+x^2} \neq 1+\dfrac{x^2}{2}$
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ on a $\sqrt{n^2+n} \in \mathbb{N}$

6 Le raisonnement par contraposée

Propriété

Soient P et Q deux assertions.
L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est appelé la contraposer de l'implication $P \Rightarrow Q$ et on note :
$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

Remarque

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est une assertion vraie, il (faut et) il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est une assertion vraie

Exemple

Soient a et b deux réels tels que $a \neq -b$, montrer que : $a \neq -\dfrac{1}{2}b \Rightarrow \dfrac{a-b}{a+b} \neq -3$.

Application

En utilisant le raisonnement par contraposée , Montrer l'implication suivantes :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \notin [-1,4] \Rightarrow x^2 - 3x - 4 > 0$$

7 Le raisonnement par récurrence

Activité

Soit $P(n)$ la fonction proportionnelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $2^n \geq n$

1. Vérifier que la proposition $P(1)$ est vraie
2. Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ on a $2k \geq k+1$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie , Montrons que $P(n+1)$ est vraie .
4. En déduire que les propositions $P(2)$; $P(5)$ et $P(7)$ sont vraie

Propriété

Soient $n_0 \in N$ et $P(n)$ une propriété qui d'un entier naturel n ou $n \geq n_0$.
La propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ si et seulement si :

1. $P(n_0)$ est vraie.
2. pour $n \geq n_0$ on a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Remarque

On peut décomposer la démonstration en trois étapes

1. Étape 1 : Initialisation : Vérifier que $P(n_0)$ est vraie
2. Étape 2 : Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $p(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie
3. Étape 3 : Conclusion : D'après le principe de récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$

Exercice

1. Montrer par récurrence $(\forall n \in N)$: $2^n \geq n+1$
2. Montrer par récurrence $(\forall n \in N^*)$: $1+2+3+......+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
3. Montrer que $7^n - 3^n$ est divisible par 4 , pour tout $n\mathbb{N}$