Nombres rationnels : introduction et comparaison

I Nombre rationnel

Activité

Le nombre	un entier relatif	un décimal relatif	un enier naturel
$\frac{1}{4}$			
-4			
-5.3			
$\frac{12}{4}$			

Activité

1. Convertir en nombres décimaux les nombres suivants :
$\frac{-2}{3}$;; $\frac{13}{9}$;; $\frac{4}{3}$;; $\frac{7}{4}$;; $\frac{-15}{2}$

2. Par exemple, on écrit : $3\times 5=15$ veut dire : $3=15\div 5$ et $5=15\div 3$
   a. Remplir les pointilles par ce qui convient :
   $4\times\cdots\cdots=12$;; $(-5)\times\cdots\cdots=130$;; $8\times\cdots\cdots=(-16)$;; $\cdots\cdots\times(-3)=(-2$
   b. Écrire les nombres trouvés, à la place des pointilles, sous forme de quotient comme indiqué dans l'exemple

Définition

Un nombre rationnel est le quotient d'un nombre entier relatif a par un nombre entier relatif **non nul** b et on le note : $\frac{a}{b}$

★ a : est appelé le numérateur

★ b : est appelé le dénominateur

Exemples

Les nombres : $\frac{1}{2}$, $\frac{-4}{3}$, $\frac{-11}{-3}$, $\frac{9}{-5}$, sont des nombres rationnels :

① Tout nombre décimal relatif, est un nombre rationnel

Par exemple : $25 = \frac{25}{1}$, $0.12 = \frac{12}{100}$, $-3.42 = \frac{-342}{100}$

② On peut écrire le nombre rationnel sous la forme : $\frac{-2.5}{3}$, $\frac{1}{-0.5}$, $\frac{-3.7}{-2.42}$

car : $\frac{-2.5}{3} = \frac{-25}{30}$, $\frac{1}{-0.5} = \frac{10}{-5}$ et $\frac{-3.7}{-2.42} = \frac{-370}{-242}$

③ Si $\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel, alors : $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ et $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

1 Le signe d'un nombre rationnel

Activité

En utilisant la division euclidienne, calculer les quotient : $\frac{3}{4}$ et $\frac{-15}{2}$, après déduire leurs signe

Règle

☆ Le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est positif, si a et b sont de même signe

☆ Le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est négatif, si a et b sont de signes différents

Exemples

☆ $\frac{7}{5}$ et $\frac{-31}{-12}$ sont des nombres rationnels positifs

☆ $\frac{-15}{17}$ et $\frac{11}{-2}$ sont des nombres rationnels négatifs

Application

1 Écrire les nombres suivants sous forme de fraction : 2.73, −3.6, 54, 7.211, −30.1

2 Déterminer le signe des nombres rationnels suivants : $\frac{9}{17}$, $\frac{-1}{216}$, $\frac{3}{128}$, $\frac{-2}{-24}$, $\frac{1}{-12}$, $\frac{-15}{36}$

Solution

1

- $2.73 = \frac{273}{100}$
- $-3.6 = \frac{-36}{10}$
- $54 = \frac{54}{1}$
- $7.211 = \frac{7211}{1000}$
- $-30.1 = \frac{-301}{10}$

2

- Les nombres rationnels positifs sont : $\frac{9}{17}$, $\frac{3}{128}$, $\frac{-2}{-24}$
- Les nombres rationnels négatifs sont : $\frac{-1}{216}$, $\frac{1}{-12}$, $\frac{-15}{36}$

2 Le nombre rationnel et l'équation

Règle

Le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est la solution de l'équation $bx = a$

tel que a et b sont deux nombres entiers relatifs et b non nul

EXEMPLES

- ✯ La solution de l'équation $-2x = 5$ est le nombre rationnel : $\frac{5}{-2}$
- ✯ La solution de l'équation $3x = -11$ est le nombre rationnel : $\frac{-11}{3}$
- ✯ La solution de l'équation $-4x = -7$ est le nombre rationnel : $\frac{-7}{-4}$

II Égalité de deux nombres rationnels

1 Activités

Activité

Compléter en utilisant l'un des symboles $=$ ou $\neq$

$27.72 \cdots\cdots 72.27$;; $-(-73) \cdots\cdots (-73)$;; $55.312 \cdots\cdots 55.321$

Activité

1. Convertir en nombres décimaux les nombres suivants :
   $\frac{-3}{4}$;; $\frac{6}{-8}$;; $\frac{9}{20}$;; $\frac{3}{7}$
2. Compléter en utilisant l'un des symboles $=$ ou $\neq$
   - $\frac{-3}{4} \cdots\cdots \frac{6}{-8}$
   - $\frac{9}{20} \cdots\cdots \frac{3}{7}$
3. Compléter en utilisant l'un des symboles $=$ ou $\neq$
   - $30 \times 15 \cdots\cdots (-10) \times (-5)$
   - $4 \times 5 \cdots\cdots (-7) \times (-3)$
4. Qu'est ce que vous remarquez ?
5. Compléter en utilisant $=$ ou $\neq$
   $\frac{8}{9} \cdots\cdots \frac{8 \times (-3)}{9 \times (-3)}$;; $\frac{3}{7} \cdots\cdots \frac{3 \times 2}{7 \times 2}$;; $\frac{6}{18} \cdots\cdots \frac{6 \div 2}{18 \div 2}$;; $\frac{24}{9} \cdots\cdots \frac{24 \div 3}{9 \div 3}$

Règle

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{x}{y}$ deux nombres rationnels

$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ signifie que $a \times y = b \times x$

EXEMPLES

1 Comparons les nombres : $\frac{18}{8}$ et $\frac{9}{4}$

On a $\begin{cases} 18 \times 4 = 72 \\ 8 \times 9 = 72 \end{cases}$ d'ou $\frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

2 Comparons les nombres : $\frac{-7}{5}$ et $\frac{3}{-11}$

On a $\begin{cases} (-7) \times (-11) \neq 77 \\ 3 \times 5 = 15 \end{cases}$ d'ou $\frac{18}{8} \neq \frac{9}{4}$

2 Réduction d'un nombre rationnel

Propriété

Si $\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel et k un nombre entier relatif non nul

Alors : $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$

Et $\frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$

La forme trouvée finalement s'appelle la forme irréductible

EXEMPLES

★ $\frac{12}{18} = \frac{\cancel{6} \times 2}{\cancel{6} \times 3} = \frac{2}{3}$

★ $\frac{-15}{25} = \frac{-\cancel{5} \times 3}{\cancel{5} \times 5} = \frac{-3}{5}$

★ $\frac{12}{-24} = \frac{\cancel{12} \times 1}{-\cancel{12} \times 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

Rendons les nombres suivants irréductibles

★ $\frac{21 \times 6 \times 11}{7 \times 22 \times 3} = \frac{\cancel{7} \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{11}}{\cancel{7} \times \cancel{11} \times \cancel{2} \times \cancel{3}} = \frac{3}{1} = 3$

★ $\frac{-30 \times 25 \times 2}{15 \times 5 \times 6} = \frac{\cancel{15} \times (-2) \times \cancel{5} \times 5 \times \cancel{2}}{\cancel{15} \times \cancel{5} \times 3 \times \cancel{2}} = \frac{-10}{3}$

III Réduction au même dénominateur

Définition

Pour réduire deux nombres rationnels au même dénominateur, on cherche le plus petit multiple commun de leurs dénominateurs

EXEMPLES

✿ Cas ❶ :

Si l'un des deux dénominateurs est multiple de l'autre, donc le plus grand des deux dénominateurs sera choisi comme dénominateur commun

Par exemple : $\frac{11}{25}$ et $\frac{3}{5}$

On a 25 est un multiple de 5, donc 25 est le dénominateur commun

$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 5}{5 \times 5} = \frac{15}{25}$ et $\frac{11}{25}$

✿ Cas ❷ :

Si aucun des deux dénominateurs n'est pas multiple de l'autre, mais les deux ont un ou plusieurs diviseurs communs autre que 1

Par exemple : $\frac{-5}{12}$ et $\frac{7}{8}$

$\frac{-5}{12} = \frac{(-5) \times 2}{12 \times 2} = \frac{-10}{24}$

$\frac{7}{8} = \frac{7 \times 3}{8 \times 3} = \frac{21}{24}$

✿ Cas ❸ :

Si les deux dénominateurs n'ont aucun diviseurs communs autre que 1

Par exemple : $\frac{3}{6}$ et $\frac{5}{11}$

Le dénominateur commun est 6×11

$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 11}{6 \times 11} = \frac{33}{66}$

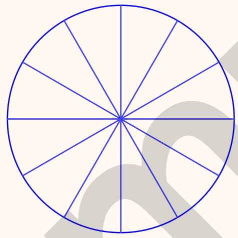
$\frac{5}{11} = \frac{5 \times 6}{11 \times 6} = \frac{30}{66}$

Avant de réduire des nombres rationnels au même dénominateur, il faut, d'abord, les rendre irréductibles lorsque c'est possible

IV Comparaison de deux nombres rationnels

Activité

La figure ci-contre représente un gâteau partagé en douze (12) morceaux égaux



1. Colorier en jaune une surface représentant $\frac{7}{12}$ du gâteau
2. A l'aide de la figure, ranger dans l'ordre croissant les fractuions suivantes : $\frac{5}{12}$; $\frac{3}{12}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{1}{12}$
3. A l'aide de la figure, comparer $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{12}$

Propriété

★ Le plus grand parmi deux nombres rationnels positifs est celui qui est le plus loin de zéro
★ Le plus grand parmi deux nombres rationnels négatifs est celui qui est le plus proche de zéro
★ Tout nombre rationnel positif est plus grand que tout nombre rationnel négatif

Exemples

★ $\frac{5}{7}$ et $\frac{11}{7}$

On a $5 < 11$ donc $\frac{5}{7} < \frac{11}{7}$

★ $\frac{4}{9}$ et $\frac{4}{3}$

On a $9 > 3$ donc $\frac{4}{9} < \frac{4}{3}$

★ $\frac{-1}{6}$ et $\frac{6}{13}$

On a $\frac{-1}{6} < 0$ et $\frac{6}{13} > 0$ donc $\frac{-1}{6} < \frac{6}{13}$

★ $\frac{-5}{4}$ et $\frac{-7}{3}$

On a $\frac{-5}{4} = \frac{(-5)\times 3}{4\times 3} = \frac{-15}{12}$ et $\frac{-7}{3} = \frac{(-7)\times 4}{3\times 4} = \frac{-28}{12}$

Or $-15 > -28$ donc $\frac{-15}{12} > \frac{-28}{12}$

Alors $\frac{-5}{4} > \frac{-7}{3}$