Chapitre

Notions de logique

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• **On approchera les propositions, les lois logiques et les méthodes de raisonnement, à partir d'activités variées et diverses, issues des acquis de l'élève et de situations déjà rencontrées.** • **On évitera toute construction théorique et toute utilisation excessive de tableaux de vérité.**	• **Utiliser le raisonnement convenable selon la situation étudiée.** • **Rédiger des raisonnements mathématiques et des démonstrations claires et logiquement correctes.** • **Étudier la vérité d une proposition logique.** • **Comprendre le sens d une proposition logique et donner sa négation.**

Contenu du programme	Les extensions
• Propositions ; opérations sur les propositions ; les quantificateurs. • Les raisonnements mathématiques : raisonnement par l'absurde ; raisonnement par disjonction des cas ; raisonnement par équivalence.	• Calcul numérique. • équations et inéquations. • Les suites numériques. • Les fonctions numériques, logarithmiques et exponentielles. • Les limites et la dérivation.

• ***Quelques motivations***

Les mathématiques est un langage pour s'exprimer rigoureusement, qui rend les calculs exacts et véritables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer.

I Proposition

1 Activité

Activité

Mettre une croix ($\times$) dans la case qui convient :

Textes mathématiques	Vrai	Faux	On ne peut pas décider sa vérité
"15×2"			
"$-4 \geqslant 12$"			
"$\sqrt{9} = 3$"			
"7 est un nombre pair"			
"$\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$"			

2 Définition

Définition

Une proposition est un texte mathématique qui a un sens et qui soit vrai soit faux pas les deux en même temps.

3 Exemples

- La proposition : " $3 \times 2 = 16$ " est *fausse*
- La proposition : " Deux droites strictement parallèles se coupent" est *fausse*
- La proposition : " $5 > 3$ " est *vraie*

II Les quantificateurs

1 Le quantificateur existentiel "∃"

a Définition

Définition

La proposition "$(\exists x \in E) : P(x)$ " signifie qu'il existe au moins un élément $x \in E$ qui vérifie $P(x)$. et qu'elle soit vrai lorsque on trouve au moins un élément x de E qui vérifie $P(x)$.

Le symbole $\exists$ est appelé "**le quantificateur existentiel**" et se lit "**il existe au moins**".

b Remarque

La proposition "$(\exists! x \in E) : P(x)$" signifie qu'il existe un seule élément x de E qui vérifie $P(x)$.

• Exemple

⊛ La proposition P_1 : "$(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x+1=0$" est vraie, (car l'élément $-\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$ vérifie $2x+1=0$)

⊛ La proposition P_2 : "$(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2=-1$" est fausse, (car il n'existe pas d'élément de $\mathbb{R}$ qui vérifie $x^2=-1$)

⊛ La proposition P_3 : "$(\exists x \in \mathbb{N}) : n+1=0$" est fausse, (car il n'existe pas d'élément de $\mathbb{N}$ qui vérifie $n=-1$ $(-1 \notin \mathbb{N})$)

Exercice

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. Q_1 : "$(\exists \in \mathbb{R}) 4x-3=0$"
2. Q_2 : "$(\exists \in \mathbb{R}) x^2+x-2=0$"
3. Q_3 : "$(\exists \in \mathbb{R}) x^2-x+2=0$"
4. Q_4 : "$(\exists \in \mathbb{R}) 4x-16>0$"

2 Le quantificateur universel "$\forall$"

a Définition

Définition

Soit "$(x \in E)$" une fonction propositionnelle $(E \neq \emptyset)$

La proposition "$(\forall x \in E) : P(x)$ " signifie que tout élément $x \in E$ vérifie $P(x)$. et qu'elle soit vrai lorsque pour tout x de E on a $P(x)$ est vraie.

Le symbole $\forall$ est appelé "**le quantificateur universel**" et se lit "**pour tout**" ou "**quel que soit**".

b Exemples

Exemple

⊛ La proposition P_4 : "$(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x+1 = 0$" est fausse, (car l'élément $0 \in \mathbb{R}$ ne vérifie pas $2x+1=0$)

⊛ La proposition P_5 : "$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 0$" est vraie, (car pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$)

Exercice

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. Q_4 : "$(\forall \in \mathbb{R})x^2+1 \geq 1$"
2. Q_5 : "$(\forall \in \mathbb{R})x^2+x+2 > 0$"
3. Q_6 : "$(\forall \in \mathbb{R})4x+16 > 0$"

Exercice

1 Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs

- P : "pour tout entier naturel n le nombre $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel"
- Q : "il existe au moins deux entier relatif n et m tel que : $n-m=5$"

2 Déterminer la valeur de vérité des propositions P et Q.

III Opérations sur les propositions

1 La négation d'une proposition

a Définition

Définition

La négation d'une proposition P notée (non P) ou $(\neg P)$ ou $(\overline{P})$ est la proposition qui est vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie.

Table de vérité :

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

b Exemples

Exemple

• La négation de la proposition "$P : 1 > \sqrt{2}$" est "$\neg P : 1 \leq \sqrt{2}$" • La négation de la proposition "$Q : \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$" est "$\neg Q : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$" • La négation de la proposition "$R : (-2)^2 = -4$" est "$\neg R : (-2)^2 \neq -4$"

c Remarques

1. Pour déterminer la négation d'une proposition il faut déterminer la négation de Certains Symboles :

Lesymbole	$=$	$<$	$>$	$\in$	$\subset$	$\forall$
Langation	$\neq$	$\geq$	$\leq$	$\notin$	$\not\subset$	$\exists$

2. La négation de la proposition "$(\exists x \in E) : P(x)$" est "$(\forall x \in E) : \neg P(x)$".

La négation de la proposition "$(\forall x \in E : P(x)$" est "$(\exists x \in E) : \neg P(x)$".

3. Pour montrer que la proposition "$(\forall x \in E : P(x)$" est fausse, il suffit de montrer que sa négation "$(\exists x \in E) : \neg P(x)$" est vraie, et donc il suffit de donnée un exemple.

Exercice

Montrer que la proposition "$(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$" est fausse

Exercice

1 Déterminer la négation des proposition suivantes :

$P_1 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) : x \leq n$ $\quad P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 2x+1=3$ $\quad P_3 : \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$

$P_4 : \forall n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{Z}$ $\quad P_5 : (\forall x \in \mathbb{R}) : 4x+16 \geq x$

2 Déterminer la valeur de vérité des propositions précédentes

2 Conjonction de deux proposition

a Activité

L'étudiant *Omar* enseigne à la fois L'arabe ; Le français et L'anglais.

Déterminer la valeur de vérité des proposition suivantes :

P_1 : "Omar enseigne l'arabe et le français"

P_2 : "Omar enseigne l'arabe et l'espagnol"

P_3 : "Omar enseigne l'espagnol et l'allemand"

b Définition

Définition

la conjonction de deux propositions notée ("P et Q") ou ($P \wedge Q$) est une proposition qui est vraie si P et Q sont vraies, et qui est fausse sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

c Exemples

1 : la proposition " Deux droites strictement parallèles se coupent" et "$2 \in \mathbb{N}$" est une proposition fausse.

2. la proposition "$\sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$" et "$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$" est fausse.

3. la proposition "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$" et "3 est impair" est une proposition vraie.

Remarque

Les propositions (P et Q) et (Q et P) ont la même vérité. On dit que la conjonction est *commutative*.

3 La disjonction de deux propositions

a Activité

L'étudiant *Omar* enseigne à la fois L'arabe ; Le français et L'anglais.

Déterminer la valeur de vérité des proposition suivantes :

P_1 : "Omar enseigne l'arabe ou le français".

P_2 : "Omar enseigne l'arabe ou l'espagnol".

P_3 : "Omar enseigne l'espagnol ou l'allemand"

b Définition

Définition

la disjonction de deux propositions notée ("P ou Q") ou ($P \vee Q$) est une proposition qui est fausse si P et Q sont fausses, et qui est vraie sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

c Exemples

1 : la proposition " Deux droites strictement parallèles se coupent" ou "$2 \in \mathbb{N}$" est une proposition vraie.

2. la proposition "$\sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$" ou "$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$" est une proposition vraie.

3. la proposition "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$" ou "$\mathbb{R} \subset \mathbb{N}$" est une proposition fausse.

Remarque

Les propositions (P ou Q) et (Q ou P) ont la même vérité. On dit que la conjonction est *commutative*.

Propriété

La négation de la proposition (P ou Q) est la proposition ($\neg P$ et $\neg Q$).

La négation de la proposition (P et Q) est la proposition ($\neg P$ ou $\neg Q$).

4 Implication de deux propositions

a Définition

Définition

L'implication de la proposition P vers la proposition Q est la proposition notée $P \Rightarrow Q$ qui est fausse si P est vraie et Q est fausse et qui est vraie sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

b Exemples

1. "$9 > 4 \Rightarrow 9 > 2$" est une proposition vraie.

2. "$\sqrt{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2 \in \mathbb{Q}}$"est une proposition vraie.

3. "3 est un nombre impair $\Rightarrow$ 4 est un nombre impair" est une proposition fausse. 4. "4 est un nombre impair $\Rightarrow$ 3 est un nombre impair" est une proposition vraie.

c Remarques

1. La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit " P implique Q " (ou si P alors Q).

2. les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ n'ont pas le même sens.

3. L'implication $Q \Rightarrow P$ est l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$.

4. Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, on commence de la proposition P et il faut trouver la proposition Q. (on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie).

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^2 + c$, $(a \neq 0)$.

Considérons les deux propositions :

P : "l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions". Q : "$ac < 0$".

Montrer que : $P \Rightarrow Q$.

5 Équivalence de deux propositions

a Définition

Définition

léquivalence de deux propositions P et Q est une proposition notée $(P \Leftrightarrow Q)$ qui est vraie si P et Q ont la même vérité et qui est fausse dans les cas contraires.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$P \Leftrightarrow Q$ signifie que "$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$"

b Exemples

"$|2-\pi| = \pi - 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}^2 = 2$" est une proposition vraie

"$1+\sqrt{3}^2 = 4 \Leftrightarrow 12 = 2^2 \times 3^2$" est une proposition fausse

"$-1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -1 > 0$" est une proposition vraie

"$(\exists n \in \mathbb{Z}) : 2n - 1 = 0 \Leftrightarrow 2$ est un nombre impair" est une proposition fausse

c Remarques

1. $P \Leftrightarrow Q$ se lit (P équivaut à Q) ou (P si et seulement si : Q) ou (P si équivalant à Q).
2. $P \Leftrightarrow Q$ est la proposition ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$).
3. Les deux propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow P$ ont le même sens.
4. On général pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$ il suffi de montrer que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

IV Raisonnements mathématiques

1 Raisonnements par équivalence

• Exemple

Montrer que :

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

2 Raisonnements par disjonction des cas

• Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x| + 5 = 3x$

3 Raisonnements par l'absurde

• Exemple

Montrer que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$