Chapitre

Limites des suites numériques

Cours 2BSHL

Présentation

La plupart des recherches dans l'histoire des mathématiques indiquent que les études faites sur certaines propriétés des nombres entiers naturels et des fractions sont à l'origine de la notion de suite. Ainsi, on trouve que les pythagoriciens se sont intéressés, depuis le cinquième siècle av-JC, aux suites arithmétiques. les suites ont été utilisées pour approcher des nombres irrationnels, comme le nombre π à qui Archimède a donné une valeur approchée, depuis le troisième siècle av-JC, en considérant deux suites de périmètres de deux polygones réguliers (l'un inscrit, l'autre circonscrit au même cercle). Les mathématiciens musulmans, comme AL-Mahani et Al-Karaji ont contribué, eux aussi, à l'utilisation des fractions continues pour l'approche des nombres irrationnels. IL a fallu attendre le huitème siècle de notre ère pour voir installer les perceptions générales sur les suites, par les contributions de Fibonacci, Viète , Newton et Lagrange qui ont travaillé sur les approximations des solutions d'équations de degré supérieur ou égal à trois. Et c'est au début de dix-neuvième siècle que Gauss, Cauchy et Bolzano ont fait étendre leurs travaux sur les suites pour inclure une infinité de termes ; ce qui a permis à Cantor et Dedekind de définir un nombre réel comme étant la limite d'une suite. De nos jours, la notion de suite trouve de multiples applications dans de nombreux domaines notament dans les sciences de l'économie, la biologie et la physique.

I Généralité sur les suites numériques

1 Définition et Notation

D — Définition

On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

Remarque

Si u est une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.
- L'image de l'entier n par u se note u_n et s'appelle le terme pour l'entier n .
- L'entier n s'appelle l'indice du terme u_n
- La suite numérique u se note : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$.

2 Mode Usuels de génération d'une suite numérique

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

a De façon explicite

D Définition

Une suite (u_n) est définie de façon explicite si le terme général u_n sexprime en fonction de n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$.

Exemple

$u_n = 3n+2$; $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1}$; $v_n = \sqrt{n^2+1}$

b Par une expression récurrente

D Définition

Lorsque le terme général un dépend du ou des terme(s) précédent(s), on définit alors la suite par une relation de récurrence et par un ou plusieurs premier(s) terme(s).
La suite est dite récurrente à un terme si u_n ne dépend que du terme précédent.

$$u_0 \quad et \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

La suite est dite récurrente à deux termes si un dépend des deux termes qui le précèdent.

$$u_0 \quad , \quad u_1 \quad et \quad u_{n+1} = f(u_n, u_{n+1})$$

Exemple

- Suites récurrente du premier ordre

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n+3}{2v_n+1} \end{cases} \quad \begin{cases} w_0 = -4 \\ w_{n+1} = \sqrt{2w_n^2+3} \end{cases}$$

- Suites numériques du second ordre.

$$\begin{cases} u_0 = 2; u_1 = -1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = -2, v_1 = \dfrac{-1}{2} \\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n+2} \end{cases}$$

Remarque

Il faut bien écrire les indices : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$

3 Suite majorée - suite minorée - suite bornée

Activité

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

1. Calculer les 3 premiers termes.
2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n \geq 0)$
3. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n \leq 2)$

D Définition

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($I \subset \mathbb{N}$)
⋆ On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I) \quad (u_n \leq M)$.
⋆ On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I) \quad (u_n \geq m)$.
⋆ On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Propriété

Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif α tel que $(\forall n \in I) \quad (|u_n| \leq \alpha)$

4 Monotonie d'une suite

Activité

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_{n+1} \geq u_n$

D Définition

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($I \subset \mathbb{N}$)
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si : $\left(\forall (n,p) \in I^2\right)\,(n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si : $\left(\forall (n,p) \in I^2\right)\,(n \geq p \Rightarrow u_n \leq u_p)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante sur I.

T Théorème

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($I \subset \mathbb{N}$)
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si : $(\forall n \in I)\,(u_{n+1} \geq u_n)$ (P)
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si : $(\forall n \in I)\,(u_{n+1} \leq u_n)$

Application

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 1}{2u_n + 3} \end{cases}$ Montrer que $(u_n)_n$ est minorée par 1 et majorée par 3.

II Suite arithmétique, Suite géométrique

1 Suite arithmétique

a Définition

Activité

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(u_n = \dfrac{3n+1}{2}\right)$ Soit n un entier naturel, calculer : $u_{n+1} - u_n$

D Définition

On appelle suite arithmétique toute suite $(u_n)_{n\in I}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $(\forall n \in I) \quad u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel fixe.
Le réel r s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n\in \mathrm{I}}$.

Exemple

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ la suite $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 2$ Le premier terme et la raison d'une suite arithmétique s'appellent aussi les éléments de la suite arithmétique.

b Terme général d'une suite arithmétique

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes, on a :

$$(\forall n \in I) : u_n = u_p + (n - p) r .$$

Application

(1) Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_{15} = 375$ et $u_{20} = 520$

1. Déterminer sa raison r
2. Déterminer son premier terme u_0

(2) Soit $(w_n)_n$ tel que : $\begin{cases} w_6 + w_9 + w_{13} = 192 \\ w_4 + w_{15} = 130 \end{cases}$ Déterminer son terme w_{30}

Remarque

Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = u_0 + nr)$
Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = u_1 + (n-1)r)$

c La somme des termes successifs d'une suite arithmétique

Propriété

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique, p un entier naturel et $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$
On a : $S = \dfrac{(n-p+1)}{2}\,[u_p + u_n]$

d Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soient a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r on a donc :

$$\begin{cases} b = a + r \\ c = b + r \end{cases}$$

En faisant la différence membre à membre on obtient : $b - a = c - b$ par suite : $2b = a + c$
Inversement : si a, b et c sont trois réels tels que $2b = a + c$ alors $b - a = c - b$
Et par suite, a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = b - a$

Propriété

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $2b = a + c$

Application

Déterminer le réel x pour que les nombres $(3x-1); (1-4x)$ et $(x-5)$ soient les termes consécutifs d'une suite arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

2 Suite géométrique

a Définition

D Définition

On appelle suite géométrique toute suite $(v_n)_{n\in I}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $(\forall n \in I) \quad v_{n+1} = qv_n \quad$ où q est un réel fixe.
Le réel q s'appelle la raison de la suite $(v_n)_{n\in I}$

Exemple

$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2} \end{cases}$ la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 2$

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

b Terme géneral d'une suite géométrique

Propriété

Si $(v_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors :
$(\forall n \in I) \quad v_n = q^{n-p} \times v_p$

Cas particuliers :

$\star$ La suite commence à u_0.
Pour obtenir le terme suivant, en fonction du précédent, on multiplie par q.
Pour obtenir u_n on a multiplié n fois par q à partir de u_0. On a donc : $(\forall n \in I) \quad v_n = q^n \times v_0$
$\star$ La suite commence à u_p.
De u_p à u_n on a multiplié $n-p$ fois par q, donc $(\forall n \in I)\,(v_n = q^{n-p} \times v_p)$

c La somme des termes consécutifs d'une suite géometrique

Propriété

Soient $(v_n)_{n\in I}$ une suite géométrique de raison q, et v_p I'un de ses termes. soit $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$
- Si $q = 1$ alors : $S = (n-p+1)v_p$
- Si $q \neq 1$ alors : $S = v_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

d Trois termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$

Application

Déterminer le réel x pour que les nombres : $\left(1+x^2\right);(3+x)$ et 10 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre et déterminer sa raison.

III Limite d'une suite numérique

1 Limite finie d'une suite numérique

Activité

1) Compléter le tableau suivant :

n	1	10	10^3	10^5	10^7	10^9	10^{11}
n^2							
$\sqrt{n}$							
$\frac{1}{n}$							
$\frac{1}{n^2}$							
$\frac{1}{n}+2$							

2) Que concluez-vous lorsque l'entier naturel n prend des valeurs de plus en plus grands

3) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^3 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^p, p\geq 4 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}$$

2 Limite finie d'une suite numérique

D **Définition**

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique et l un nombre réel. On dit que la suite (u_n) tend vers l quand n tend vers $+\infty$ si, pour tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.et on écrite $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

Propriété :

Soit p $\in \mathbb{N}$ et $p \geq 4$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0, p\geq 4$$

Exemple

✓ On a : $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n^2}$ puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ alors $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = 2$

✓ On a : $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4} - \frac{n}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}$ puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{n^4} = 0$

Remarque

Si une suite admet une limite finie, alors cette limite est unique.

3 Limite infinie d'une suite numérique

Propriété

Soit p $\in \mathbb{N}$ et $p \geq 4$

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty;\ \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty;\ \lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty;\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty;\ \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty, p \geq 4$$

Exemple

✓ On a : $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n + \frac{1}{n^2}$ puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ alors $\lim_{n\to\infty} n + \frac{1}{n^2} = +\infty$ ✓ On a : $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}+5n^4+6}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} + 5n^3 + \frac{6}{n} = +\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} 5n^3 = +\infty$

Application

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$u_n = 2n^3 - 3n^2 + 4n$	$u_n = n^2 - 5\sqrt{n}$	$u_n = \frac{3n^3+2n+4}{n-3}$	$u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}+1}$
$u_n = \sqrt{n+1} - 2n$	$u_n = \sqrt{3n^2+4} - n$	$u_n = \sqrt{n}$	$2n+1$

4 Limite d'une suite géométrique (q^n où $q \in \mathbf{R}$)

Propriété

Soit q un nombre réel.

◇ Si $-1 < q < 1$ Alors $lim_{n\longrightarrow\infty} q^n = 0$.

◇ Si $q > 1$ Alors $lim_{n\longrightarrow\infty} q^n = \infty$.

◇ Si $q = 1$ Alors $lim_{n\longrightarrow\infty} q^n = 1$.

Exemple

↬ $lim_{n\longrightarrow\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$; $lim_{n\longrightarrow\infty} (\frac{6}{5})^n = +\infty$;

Application

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$u_n = \frac{1}{4^n}$; $u_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}$; $u_n = (\pi - 3)^n$.