

Arithmétique dans $\mathbb{N}$ 

Ensemble des nombres entiers naturels

Activité

Parmi les nombres suivants : $0, 8, \sqrt{2}, \sqrt{25}, \frac{12}{3}$. Préciser ceux qui sont des nombres entiers naturels.

Définition

- 1 Les nombres entiers naturels forment un ensemble qu'on note tels que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- 2 Les nombres entiers naturels non nuls forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}^*$ tels que $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

• Exemple

- 1 3 est un entier naturel, on dit que 3 appartient à l'ensemble et on écrit $3 \in \mathbb{N}$.
- 2 -5 n'est pas un entier naturel, on dit que 5 n'appartient pas à l'ensemble. On écrit $-5 \notin \mathbb{N}$.
- 3 4 est un entier naturel non nul, on dit que 4 appartient à $\mathbb{N}^*$, on écrit $4 \in \mathbb{N}^*$.

Remarque

- 1 L'ensemble des nombres entiers naturels est infini, signifie que, si n est un entier naturel alors son successeur $n + 1$ est aussi un nombre entier naturel
- 2 Le symbole $\in$ se lit n appartient à $\mathbb{Z}$
- 3 Le symbole $\notin$ se lit n n'appartient pas à $\mathbb{Z}$

Application

Compléter par $\in$ ou $\notin$:

$$13 \dots \mathbb{N} ; \quad -1 \dots \mathbb{N} ; \quad \sqrt{12} \dots \mathbb{N} ; \quad 0 \dots \mathbb{N}^* ; \quad \frac{\pi}{3} \dots \mathbb{N}$$

$$\frac{18}{9} \dots \mathbb{N} ; \quad -\left(\frac{32}{-16}\right) \dots \mathbb{N} ; \quad \sqrt{25} \dots \mathbb{N} ; \quad 0 \dots \mathbb{N}^* ; \quad \frac{\pi}{2} \dots \mathbb{N}$$



Divisibilité dans $\mathbb{N}$

1 Nombres pairs Nombres impairs

Activité

- 1 Parmi les nombres suivants, Déterminer les multiples du nombre 2 : 8, 15, 16, 33, 138
- 2 Montrer que pour tout n on a $n \times (n + 1)$ est nombre divisible par 2
- 3 pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer parmi les nombres suivants ceux qui sont les multiples de 2 : $2^2 + 1$, $2n + 8$, $4n^2 + 1$

Définition

Soit a un nombre entier naturel.

- 1 On dit que a est un nombre pair s'il existe un nombre entier naturel k tel que : $a = 2k$
- 2 On dit que a est un nombre impair s'il existe un nombre entier naturel k tel que : $a = 2k + 1$

Exemple

- 1 On a : $144 = 272$, donc 144 est un nombre pair.
- 2 On a : $161 = 280 + 1$, donc 161 est un nombre impair.

2 Opérations sur les nombres pairs et les nombres impairs :

Propriété

Soient a et b deux nombres entiers naturels on a :

a	b	$a + b$	$a - b (a > b)$	$a \times b$
Pair	Pair	Pair	Pair	Pair
Pair	Impair	Impair	Impair	Pair
Impair	Pair	Impair	Impair	Pair
Impair	Impair	Pair	Pair	Impair

EXEMPLES

Supposons que a et b soient tous deux pairs. Cela signifie qu'il existe des entiers k et m tels que $a = 2k$ et $b = 2m$.

Alors, $a + b = 2k + 2m = 2(k + m)$.

Comme $k + m$ est également un entier, $a + b$ est divisible par 2 et donc pair.

Ainsi, si a est pair et b est pair, alors $a + b$ est également pair.

Même démarche pour les autres cas.

Application

- 1 Étudier la parité des nombres suivants : $1359 + 59321$; $978^2 65^2$; 732753
- 2 Soit n un entier naturel ; étudier la parité des nombres suivants : $2n + 3$, $1 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2$

T

Théorème

Le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre pair.

EXEMPLES

Soient n et $n + 1$ deux entiers naturels consécutifs.

Nous allons effectuer une preuve par disjonction des cas en fonction de la parité de n .

Cas 1 : n est pair.

Si n est pair, alors $n + 1$ est impair. Un nombre pair multiplié par un nombre impair donne un produit pair. Ainsi, $n \cdot (n + 1)$ est pair.

Cas 2 : n est impair.

Si n est impair, alors $n + 1$ est pair. Un nombre impair multiplié par un nombre pair donne un produit pair. Donc, $n \cdot (n + 1)$ est pair.

En examinant les deux cas possibles, nous constatons que dans chaque cas, le produit $n \cdot (n + 1)$ est pair.

Par conséquent, dans tous les cas, le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre pair.

3 Multiple et diviseur d'un nombre entier naturel**Activité**

- 1 Parmi les nombres suivants , reconnaître les multiples de 3 : 78 , 34×6 , 104 , $102 + 39$
- 2 si m et n sont deux entiers naturels vérifiant $m = 7n$ que peut-on déduire ?

Définition

Soient a et b deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel k tel que $a = b \cdot k$, alors :

a : s'appelle le multiple de b

b : s'appelle le diviseur de a

k : s'appelle le rapport de a par b

Exemple

$30 = 2 \times 15$: donc 30 : multiple de 15 ; et 15 : diviseur de 30 ; et 2 : Le rapport de 30 par 15

Remarque

- 1 0 est un multiple de tous les nombres entiers naturels.
- 2 1 est un diviseur de tous les nombres entiers naturels.

Application

- 1 Déterminer les diviseurs de 36 et 82
- 2 Déterminer les multiples de 3 inférieurs ou égal à 50.

4

Critères de divisibilité par 2,3,4,5 et 9**Propriété**

Soit a un entier naturel. On dit que n est divisible par :

- 1 2 si son chiffre des unités est : 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8
- 2 5 si son chiffre des unités est : 0 ou 5
- 3 3 ou 9 si la somme de ses chiffres forme un multiple de 3 ou 9.
- 4 4 si son chiffre des unités et son chiffre des dizaines forment un multiple de 4.

Exemple

- 1 4725 : divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.
- 2 4725 : divisible par 3 et par 9 car la somme de ses chiffres qui est $4 + 7 + 2 + 5 = 18$ est un multiple de 3 et de 9.
- 3 1628 : divisible par 4 car 28 est un multiple de 4.
- 4 1628 divisible par 2 car son chiffre des unités est 8.

Application

Étudier la divisibilité de 3611790 par 2, 3, 4, 5 et 9

**Nombres premiers****Activité**

Déterminer les diviseurs de 2, 3, 5 et 17. Que remarquez-vous ?

Définition

Un entier naturel supérieur ou égal à 2 est dite premier s'il possède deux diviseurs 1 et lui-même.

Application

Parmi les nombres suivants ; déterminer ceux qui sont des nombres premiers : 37 ; 45 ; 67 ; 73 ; 87

Remarque

- 1 1 n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur.
- 2 2 le seul nombre pair qui est premier.
- 3 Pour étudier la primalité d'un nombre entier naturel n , on cherche tous les nombres premiers p qui vérifient $p \leq \sqrt{n}$. Si n est divisible par l'un de ces nombres alors n n'est pas un nombre premier sinon n est premier

Exemple

Le nombre 37 est-il premier ?

On a $\sqrt{37} = 6,08$ et les nombres premiers inférieur ou égal à $\sqrt{37}$ sont 2, 3 et 5

Or 37 n'est pas divisible par 2 ; 3 et 5 ; alors 37 est un nombre premier.

Application

Étudier la primalité des nombres suivants : 101 ; 137 ; 1563

IV PGCD PPCM**1 Décomposition en produit de facteurs premiers.**

T

Théorème

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en produit de facteurs premiers

Exemple

- 1 $30 = 2 \times 5 \times 3$ est une décomposition de 30 en produit de facteurs premiers

2

Facteur premier	Division	Décomposition partielle
3	$825 \div 3 = 275$	3×275
5	$275 \div 5 = 55$	$3 \times 5 \times 55$
11	$55 \div 11 = 5$	$3 \times 5^2 \times 11$

2 PGCD

Activité

- 1 Déterminer tous les diviseurs du nombre 12
- 2 Déterminer tous les diviseurs du nombre 18
- 3 Déterminer le plus grand diviseur commun entre 12 et 18
- 4 Refaire la même procédure pour 102 et 45

Définition

Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls.

Le plus grand commun diviseur de a et b s'appelle le PGCD de a et b et note $PGCD(a, b)$ ou $a \wedge b$

Remarque

Comme 1 est un diviseur de tous nombre a et b de ; alors $PGCD(a, b) \geq 1$

Exemple

- 1 On a $D(27) = \{1; 3; 9; 27\}$ et $D(81) = \{1; 3; 9; 27; 81\}$
Alors les diviseurs communs à 27 et 81 sont : 1, 3, 9, 27.
D'où $PGCD(27, 81) = 27$
- 2 On a $D(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ et $D(105) = \{1; 3; 5; 7; 15; 21; 35; 105\}$
Alors les diviseurs communs à 18 et 105 sont : 1, 3.
D'où $PGCD(18, 105) = 3$

Application

Déterminer les diviseurs de 36 et 84 puis déduire $PGCD(36, 84)$

T

Théorème

Soit $a \in \mathbb{N}$

- 1 $a \wedge a = a$
- 2 $a \wedge 1 = 1$
- 3 $a \wedge 0 = a$
- 4 Si un entier naturel b divise a , alors $a \wedge b = b$.

T

Théorème

Soient a et b deux nombres entiers naturels .

Le $PGCD(a, b)$ est le produit de facteurs premiers communs apparaissent à la fois dans la décomposition de a et b et affectés à une petite puissance

• Exemple

$a = 120$ et $b = 132$ on a :

$$132 = 2^2 \times 3 \times 11 \text{ et } 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

par conséquent $PGCD(132, 120) = 2^3 \times 3 = 12$

3 Deux nombres entiers naturels premiers entre eux

T

Théorème

Soient a et b deux nombres entiers naturels .

On dit que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $PGCD(a, b) = 1$

Application

Montrer que 37 et 8 sont premiers entre eux.

4 PPCM

Activité

- 1 Déterminer les cinq premier multiples du nombre 6
- 2 Déterminer les cinq premier multiples du nombre 8
- 3 Déterminer le plus petite multiple commun entre 6 et 8
- 4 Refaire la même procédure pour 10 et 45

Définition

Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls.

Le plus petit commun multiple non nul de a et b s'appelle le PPCM de a et b et se note $PPCM(a, b)$ ou $a \vee b$

• Exemple

On a $M(7) = \{0, 7, 14, 21, 28, \dots\}$ et $M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$ Donc $PPCM(7, 3) = 21$

Application

Déterminer $PPCM(12, 15)$

T

Théorème

Soient a et b deux nombres entiers naturels .

Le $PPCM(a, b)$ est le produit de facteurs premiers communs et non communs apparaissent dans la décomposition de a et b et affectés à une grande puissance.

Application

Décomposer 45 et 120 en produit de facteurs premiers, puis déduire $PPCM(120, 45)$

Remarque

5

Relation entre PGCD et PPCM

T

Théorème

Soit a et b deux entiers naturels, on a :

$$PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = a \times b$$

Remarque

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Déterminons $PGCD(a, b)$ sachant que $ab = 180$ et $PPCM(a, b) = 60$