Chapitre

La continuité d'une fonction

I Rappel

1 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6} \quad\Big|\quad \lim_{x\to 3^+}\frac{x-4}{x^2-9} \quad\Big|\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} \quad\Big|\quad \lim_{x\to 0}\frac{3\sin(x)-2x}{x}$$

2 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x-3} \text{ si } x\geq 2 \\ f(x)=x^2+x-6 \text{ si } x<2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x)=\dfrac{x|x^2-4|}{x-2} \text{ si } x\neq 2 \\ g(2)=8 \end{cases}$$

Étudier la limites de chacune des fonctions f et g en $x_0=2$.

II La continuité en point - La continuité en Intervalle

Activité

On considère la fonction f et g tels que : $\begin{cases} f(x)=2x+3 & x\leq 1 \\ f(x)=f(x)=\frac{5}{x} & ;x>1 \end{cases}$ et $\begin{cases} g(x)=\frac{x^2 2x-3}{x^2-9} \\ g(-3)\neq 0 \end{cases}$

1 Calcule la limite de f en gauche et droite de 1 , Que peut déduire ?

2 compare $\lim_{x\to -3} g(x)$ et g(-3) , que peut déduire ?

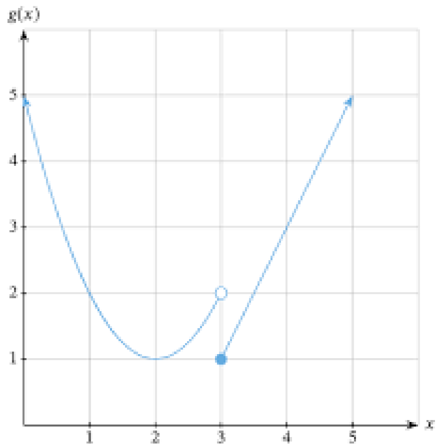
D Définition

Soit f une fonction définie sur une intervelle ouverte I et a $\in I$
On dit f est continue sur a si :

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Exemple

Soit g une fonction représenter graphiquement par :



En remarque que g pas continue en 1

1 La continuité à droite et à gauche

D Définition

Soit f une fonction définie sur l'intervalle de la forme [a ; a+α[tels que $\alpha > 0$
on dit que f continue à droite si :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Soit f une fonction définie sur l'intervalle de la forme]a-α ; a] tels que $\alpha > 0$
on dit que f continue à gauche si :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Application

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x}{x} ; x < 1 \\ f(x) = 5x+1 ; ; 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \frac{9x+3}{2x} ; x > 1 \end{cases}$

1. Étudier la continuité de f sur la droite de 1 .
2. Étudier la continuité de f sur la gauche de 0 .

Propriété

Soit f une fonction définie sur l'intervalle ouverte I et a un élément de I .
On dit que f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche de a .
C'est-à-dire $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Application

1 On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ,\text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$

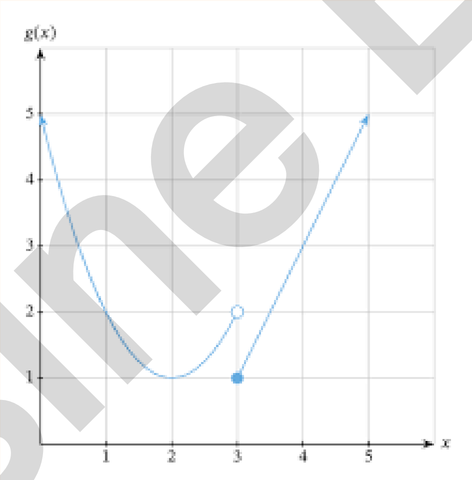
2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x} & ,\text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{1+x}-\dfrac{1}{2} & ,\text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

III La continuité sur un Intervalle

Activité

On considére la fonction g qui représenter par :



1 Est-ce que g est continue sur la droite de 3 et sur la gauche de 3 ?

2 Est-ce que g continue sur l'intervalle [0 ; 2] et sur l'intervalle [4 ; 5] ?

D **Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouverte I .
On dit que f continue sur l'intervalle ouverte I si elle est continue sur tout les points de I
On dit que f continue sur l'intervalle [a,b], si elle est continue sur l'intervalle ouverte]a , b[et continue à la droite de a et à la gauche de b .

Remarque

f pas continue sur un intervalle si au moins pas continue en un point de cette intervalle
.

1 La continuité des fonctions usuelle

Propriété

1. toutes les fonctions polynomiales et cos(x) et sin(x) sont des fonction continue sue **R**
2. toutes les fonction rationnel et irrationnel sont continue sur leur Domaine définition
3. la fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty\,[$

Exemple

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x^3-1}{x-1}$
On a f est définie sur $\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
Or f est une fonction rationnelle alors elle est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition..
Donc f est continue sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
NB. On n'écrit pas f est continue sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

Application

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Étudier dans chacun des cas suivants la continuité de f sur l'intervalle I.

1. $f(x)=3x^3-x^2+4$ et $I=[-4;5]$;
2. $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x-2}$ et $I=]2;+\infty[$;
3. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ et $I=[-3,-2]$;

2 Les opérations sur les fonctions continues

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I .

1. les fonction f+g et f-g et f×g et k×f (k $\in$ **R**) sont des fonctions continues sur I
2. si $(\forall x\in I);g(x)\neq 0)$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I
3. Si $(\forall x\in I);f(x)\leq 0$ alors : $\sqrt{f}$ est continue sur I

Application

Montrer que f est continue dans l'intervalle I pour chaque cas :

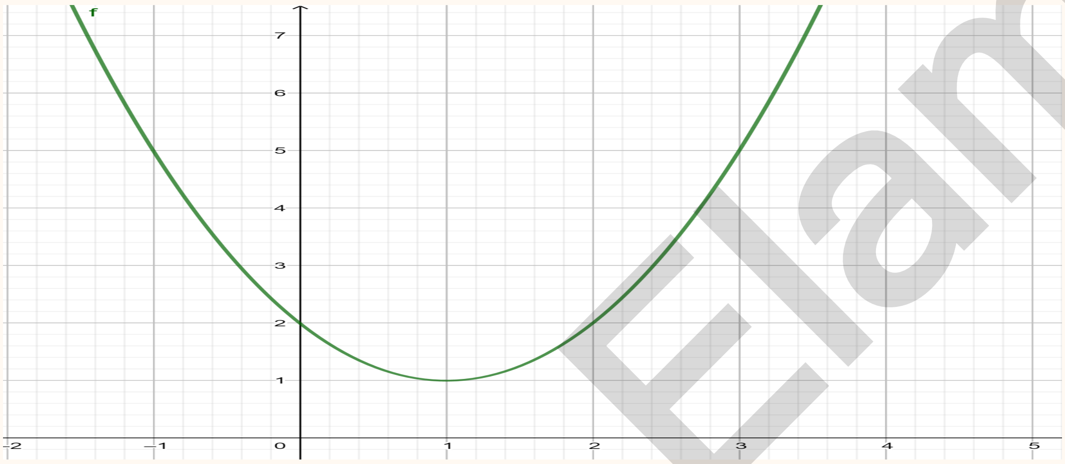
1. f(x) = $3x^2+x-4$ et I = $\mathbb{R}$
2. f(x) = $\frac{x^3+4}{x}$ et I = $]0;+\infty[$
3. f(x) = $\frac{5x}{x^2+1}$ et I = $\mathbb{R}$
4. f(x) = $x+\sqrt{x-2}$ et I = $[2;+\infty[$

IV IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1 Image d'un segment

Activité

Soit f une fonction représenter par la figure suivant :



Détermine l'image des intervalles suivantes : f([0; 1]) et f([2 ; 3]) et f([-1 ; 0])

Remarque

- Image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle .
- Image d'un segment par une fonction continue est un segment .

2 L'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I .
$a \in Ietb \in I$

1 f est continue est strictement croissante :

- a f([a ;b]) = [f(a) ; f(b)]
- b f([a ; b[) = [f(a) ; $\lim_{\to b^-} f(x)$[
- c f(]a ; b]) =]$\lim_{\to a^+} f(x)$; f(b)]

2 f est continue est strictement décroissante :

- a f([a ;b]) = [f(b) ; f(a)]
- b f([a ; b[) =]$\lim_{\to b^-} f(x)$;f(a)]
- c f(]a ; b]) = [f(b) ; $\lim_{\to a^+} f(x)$ [

Application

Étudier la continuité et la monotonie de f dans chaque intervalle I et J puis calculer f(I) et f(J) pour chaque cas :

1. f(x) = 2x-1 et I = [0 ; 1] et J =] $-\infty;+\infty$ [
2. f(x) = $\frac{1}{x}$ et I = [$\frac{1}{2}$; 1] et J =] 0; $+\infty$ [
3. f(x) = $\frac{2x-3}{x-1}$ et I = [1 ; $+\infty$ [et J =] 0; 1 [
4. f(x) = $\frac{x^2}{x^2+1}$ et I =] $-\infty$; 0 [et J =] 0; $+\infty$ [

Application

Soit f une fonction continue sur les deux intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$.
Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans les cas suivants :

1. $I=[0;1]$
2. $I=[0;2[$
3. $I=]-\infty,0[$
4. $I=]2,+\infty[$
5. $I=]-\infty,2[$

V Théorème des valeurs intermédiaire

T Théorème

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et a et b deux éléments du I .
Pour tout α compris entre f(a) et f(b) il existe au moins c compris entre a et b tel que : f(c) = α

Résultat 1 :
Soit f une fonction continue sur [a ; b] et f(a)$\times$f(b)<0 donc il existe au moins un élément c sur]a ;b[tels que : f(c) = 0

Résultat 1 :
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur [a ; b] et f(a)$\times$f(b)<0 donc il existe une unique élément c sur]a ;b[tels que : f(c) = 0

Exemple

Soit f une fonction définie par : f(x)= x^3+2x^2-4x-3
Montrer que l'équation f(x) = 0 , admet au moins une solution sur l'intervalle]1 ;2[

VI La continuité du fonction composé

Propriété

Soit f et g deux fonction , si f continue sur I et g continue sur J et f(I)$\subset$ J
Alors g$\circ$f est continue sur I.

VII La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Activité

Soit f une fonction numérique définie sur I = [1 ;2] par : f(x) = x^2+1

1. Montrer que f continue et strictement croissante sur I
2. Détermine J l'image d'intervalle I par fonction f
3. Soit x $\in$J et y $\in$ I tel que : f(y)= x
   Écrire y en fonction de x

Remarque

Si f continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors on dit que f admet une fonction réciproque sur I .

D Définition

Soit f continue et strictement monotone sur l'intervalle I , on a f admet une fonction réciproque $f^{-1}(x)$ définie de J = f(I) est on écrit :

$$\forall x \in J, \forall y \in I$$
$$f(y) = x \iff y = f^{-1}(x)$$

Exemple

On considère la fonction f définie par f(x) = $\sqrt{2x-4}$ et I = [2 ; $+\infty$[

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J qui peut déterminer .

Propriété

Si f une fonction continue et strictement monotone sur I et f^{-1} la fonction réciproque de f, Alors :
-f^{-1} est une fonction continue sur J = f(I)
- f^{-1} est strictement monotone sur f(I) et à la même monotonie de f sur I .
- la représentation graphique de f^{-1} est la symétrique de courbe f par rapport la droite y=x dans un repère orthonormé directe .