Chapitre

Limites et continuité

I Série d'exercices

Exercice

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos+1}{x-\pi}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-4}{x-1}$
6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3+2x^2-11x-12}{x^4-81}$
7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x}-x}{\sqrt{2x^2+x-5}}$
9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\tan x$
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x+1$

Exercice

Soit la fonction f définie par :$\forall x\in[1;+\infty[\quad f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{E(x)}{x^2}\right)$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} E(x)=+\infty$
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{E(x)}{x^2}=0$. puis en déduire limite de f en $+\infty$.

Exercice

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = & x\sqrt{\left(E(\frac{1}{x})+1\right)^2+1} \quad ;x\neq 0 \\ f(0) = & 1 \end{cases}$

1. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $\sqrt{x^2+1} < f(x) \leq \sqrt{2x^2+2x+1}$
   b. En déduire que f est continue à droite en 0.
2. Étudier la continuité de f en 0.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \sin x.E\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $|f(x) - \frac{\sin x}{x}| \leq |\sin x|$
2. En déduire un prolongement par continuité de f en 0.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = & \frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{2|x|} \quad ;x\neq 0 \\ f(0) = & \frac{1}{4} \end{cases}$

1. Etudier la continuité f sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Soit f une fonction définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

1. Soit a un élément de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{a\})$ $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{1}{x}.\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(a)}{ax}$
2. En déduire que si g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice

Soit g la fonction définie par : $g(x) = 1 + \sin x - x$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ tq : $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

1. a. Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0; \dfrac{2n}{n+1}\right]$.
   b. En déduire que $f\left(\dfrac{2n}{n+1}\right) < 0$.
2. Montrer que :$\exists \alpha \in \left[\dfrac{2n}{n+1}; 2\right] / f(\alpha) = 0$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$

1. Montrer que f est continue sur $]1; +\infty[$.
2. a. Montrer que :$\forall x \in]1; +\infty[\ f(x) > \dfrac{1}{2}$.
   b. En déduire que f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.
3. Montrer que f est une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
4. Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x^2 + x + 1} - x$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $n > 2$).
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x^2 + 1} + x$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $n > 2$).

Exercice

soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+56}-4}$

1 Déterminer le domaine de définition de f.

2 Calculer les limites de f en 8 et en $+\infty$.

Exercice

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=Arctan(\sqrt{1+x^2}-x)$

1 Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R} \quad 0<f(x)<\dfrac{\pi}{2}$

2 Soit x un élément de $\mathbb{R}$

a Montrer que : $1-\tan^2 f(x)=2x\tan(f(x))$

b En déduire que $x=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-2f(x)\right)$

3 En déduire que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}Arctan x$

Exercice

1 Montrer que : $Arctan\left(\dfrac{4}{3}\right)=2Arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

2 Calculer : $Arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+Arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)+Arctan\left(\dfrac{1}{8}\right)$

Exercice

Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad / \, ab<1$

1 Montrer que $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$ avec $\alpha=Arctan(a)$ et $\beta=Arctan(b)$.

2 Montrer que $Arctan(a)+Arctan(b)=Arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$

Exercice

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

1. $Arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)+Arctan(x)=\frac{\pi}{2}$
2. $Arctan(x)+Arctan(2x)=\frac{\pi}{4}$

Exercice

1. Soit $x\in]0;1[$; montrer que $x^{\frac{6}{7}}>x$.
2. En déduire que $(\forall x;y\in]0;+\infty[)$ on a : $\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{y^6}>\sqrt[7]{(x+y)^6}$.
   $\left(0<\frac{x}{x+y}<1 \text{ et } 0<\frac{y}{x+y}<1\right)$