Chapitre

# Limite et continuité

## I RAPPELS

### 1 Les opérations sur les limites

**Limite de la somme**

Soit $(l,l') \in \mathbb{R}^2$

| $\lim f$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim g$ | $l'$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim f+g$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $F.I$ |

**Limite des produit**

Soit $(l,l') \in \mathbb{R}^2$

| $\lim f$ | $l$ | $l>0$ où $+\infty$ | | $l<0$ où $-\infty$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim g$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim f\times g$ | $l\times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $F.I$ | $F.I$ |

**Limite des inverses**

Soit $l \in \mathbb{R}^*$

| $\lim f$ | $l$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim \frac{1}{f}$ | $\frac{1}{l}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ |

**Limite des quotients**

Soit $(l,l') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

| $\lim f$ | $l$ | $l'$ | $l'$ | $l>0$ où $+\infty$ | | $l<0$ où $-\infty$ | | $+\infty$ | | $-\infty$ | | $\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim g$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $l>0$ | $l<0$ | $l>0$ | $l<0$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim \frac{f}{g}$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $F.I$ | $F.I$ |

**Propriété**

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle pointé de centre $x_0$ et $l \in \mathbb{R}$

- Si $|f(x)-l| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$
- Si $u(x)\leq f(x)\leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$
- $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ où $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-l$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ et $f(x)\geq 0$ alors $l\geq 0$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ ; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l'$ et $f(x)\geq g(x)$ alors $l\geq l'$

**Exercice**

1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^3+3x^2-5}{1-x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x+3-\sqrt{x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{\sqrt{x}+x}$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-cosx}-sin^2x-\sqrt{3}}{1-tanx}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x+1}{|1-x^2|}$

**Exercice**

2 Soit $f$ la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{a^2x^3-2ax}{x}+1-x^2\left(a\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$ ; avec $a\in\mathbb{R}^*$

1. Déterminer $D_f$ l'ensemble de définition de la fonction $f$
2. Montrer que : $\forall x\in D_f$
$f(x)=1-2a+a^2\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)^2$
3. Montrer que : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=(a-1)^2$

**Exercice**

3 Soit $f$ la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1}{x+a}-\frac{a^2x^2}{a^3+x^3}$ ; avec $a\in\mathbb{R}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$
2. Déterminer les valeurs de $a$ pour lesquelles $f$ admet une limite quand $x$ tend vers à $-a$
3. On considère la fonction $g$ définie par : $g(x)=\frac{bx^2+(c+1)x-d}{a^3+x^3}$ avec $(b,c,d)\in\mathbb{R}^3$. Déterminer les valeurs de $b,c$ et $d$ en fonction de $a$ pour lesquelles $f(x)=g(x)$
4. On pose $a=2$ ; calculer $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x)$

**Exercice**

4 Soit $g$ la fonction numérique définie par : $g(x)=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}-2}{x}$ ;

1. Déterminer $D_g$ l'ensemble de définition de la fonction $g$
2. Montrer que : $\forall x\in D_g$
$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}-\frac{1}{\sqrt{1-x}+1}$
3. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

**Exercice**

5 Soit $h$; $h_1$ et $h_2$ des fonctions numériques définie par : $h(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2x+2}{x^2-4}$ ; $h_1(x)=\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$
et $h_(x)=-\frac{2}{x+2}$

1. Déterminer $D_h$ l'ensemble de définition de la fonction $h$
2. Montrer que : $\forall x\in D_h$
$h(x)=h_1(x)+h_2(x)$
3. Calculer : $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

**Exercice**

6 Soit $u$ la fonction numérique définie par : $u(x)=\frac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2}$

1. Déterminer $D_u$ l'ensemble de définition de la fonction $u$
2. Montrer que :$\forall x\in D_u$
$u(x)=-\frac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x+2}+2)}-2$
3. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 2} u(x)=\frac{-9}{4}$

# II Continuité d'une fonction numérique

## 1 Continuité d'une fonction en un point

**Activité**

Soit $f$ une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1} & ,x \neq 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

1. Calculer $\lim_{x\to 1} f(x)$
2. Comparer $\lim_{x\to 1} f(x)$ et $f(1)$

**Définition 1.1** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre $x_0$ .

- On dit que la fonction $f$ est continue au point $x_0$ si : $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- On dit que la fonction $f$ est discontinue au point $x_0$ si : $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

**Exemple**

1. On considère la fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+2x^2-2x-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ f(1) = \frac{5}{2} \end{cases}$

   Étudions la continuité de la fonction $f$ au point $x_0 = 1$

   Calculons $\lim_{x\to 1} f(x)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-2x-1}{x^2-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+3x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+1}{x+1} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

   Comme $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

   Donc $f$ est continue au point $x_0 = 1$

2. On considère la fonction $g$ définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-x-1}{x}, & x \neq 1 \\ g(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Étudions la continuité de la fonction $g$ au point $x_0 = 0$
Calculons $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 1} g(x) &= \frac{\sqrt{x+1}-x-1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{x}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} - 1 \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)} - 1 \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} - 1 \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} - 1 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(1)$.

Donc $f$ est discontinue au point $x_0 = 1$

**Application**

1 Déterminer la valeur de $\alpha$ pour laquelle la fonction $g$ soit continue au point $x_0$

a $\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}-1}, & x \neq 1 \\ g(1) = \alpha \end{cases}$ ; $x_0 = 1$

b $\begin{cases} g(x) = \frac{2\tan(x)+\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ g(0) = \alpha \end{cases}$ ; $x_0 = 0$

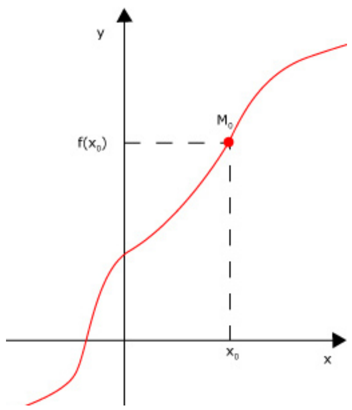
2 Déterminer les valeurs de $a$ et $b$ pour lesquelles la fonction $h$ soit continue au point $x_0$

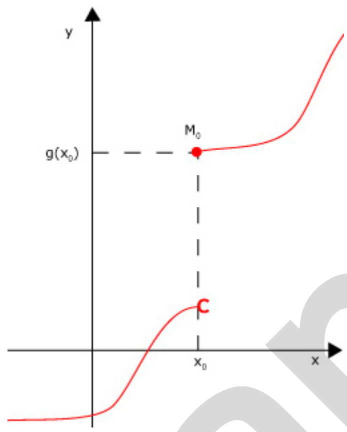
a $\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{2x+2}-x^2-a}{x-1}, & x \neq 1 \\ h(1) = b-3a \end{cases}$ ; $x_0 = 1$

b $\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{\cos(x)+3}-2(x-a)}{x}, & x \neq 1 \\ h(1) = b^2-a \end{cases}$ ; $x_0 = 0$

c $\begin{cases} h(x) = \frac{-2(x-a)^2}{+}3x-a+3x, & x \neq 0 \\ h(0) = b^2+3b-4 \end{cases}$ ; $x_0 = 0$

## a Interprétation graphique




$f$ es continue au point $x_0$, signifie
que la courbe représentatif de la fonction $f$

$g$ es discontinue au point $x_0$, signifie
que la courbe représentatif de la fonction $g$

## b Continuité à droite - Continuité à gauche

### Définition 1.2

1. Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle de la forme $]x_0, x_0+r[$ avec $(r>0)$
On dit que la fonction $f$ est continue à droite de $x_0$ si : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

2. Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle de la forme $]x_0-r, x_0[$ avec $(r>0)$
On dit que la fonction $f$ est continue à gauche de $x_0$ si : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

**EXEMPLE**

1. Soit $f$ une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} + & ; x > -2 \\ f(-2) = 2 \end{cases}$

Étudions la continuité de la fonction $f$ à droite de $x_0 = -$, calculons $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(-2)^+} f(x) &= \lim_{x\to(-2)^+} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} + 2 \\
&= \lim_{x\to(-2)^+} \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}\times\sqrt{x+2}} + 2 \\
&= \lim_{x\to(-2)^+} \frac{(x+2))\sqrt{x+2}}{x+2} + 2 \\
&= \lim_{x\to(-2)^+} \sqrt{x+2} + 2 \\
&= 2 = f(-2)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = f(-2)$, alors $f$ est continue à droite de $-2$

2 On considère la fonction $g$ définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^3-3x+2}{\sqrt{1-x}} + & ;x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x-1} + x - 1 & ;x \geq 1 \end{cases}$

Étudions la continuité de la fonction $g$ à gauche de $x_0 = 1$, calculons $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} g(x) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3-3x+2}{\sqrt{1-x}} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x^3-3x+2)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} \times \sqrt{1-x}} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x^3-3x+2)\sqrt{1-x}}{1-x} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)^2(x+2)\sqrt{1-x}}{1-x} \\
&= \lim_{x \to 1^-} -\frac{(x-1)^2(x+2)\sqrt{1-x}}{x-1} \\
&= \lim_{x \to 1^-} -(x-1)^2(x+2)\sqrt{1-x} \\
&= 0 = f(1)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = f(1)$, alors $g$ est continue à gauche de 1

**Théorème**

Une fonction numérique est continue au point $x_0$ si elle est continue à droite et à gauche au point $x_0$

$(f$ est continue au point $x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

**Application**

Étudier la continuité de la fonction $f$ à droite et à gauche de $x_0$

1 $(x_0 = 2)$ $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2} & ;x > 2 \\ f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} & ;x < 2 \\ f(2) = -\frac{9}{4} \end{cases}$

2 $(x_0 = 4)$ $\begin{cases} g(x) = \frac{16-x^2}{|x-4|} & ;x \neq 4 \\ f(4) = 8 \end{cases}$

3 $(x_0 = 1)$ $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+2x^2-2x-1}{x-1} - 1 & ; x > 1 \\ f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} & ; x < 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$

## 2 Les opérations sur les fonctions continues

### a Continuité d'une fonction sur un intervalle

**Définition 1.3** Soit $f$ une fonction numérique définie sur l'intervalle $I$ et $[a,b] \subset I$ ($a$ et $b$ deux réels $a < b$)

- On dit que $f$ est continue sur $]a,b[$, si elle est continue en tout point de $]a,b[$
- On dit que $f$ est continue sur $[a,b[$, si elle est continue sur $]a,b[$ et à droite de $a$
- On dit que $f$ est continue sur $]a,b]$, si elle est continue sur $]a,b[$ et à gauche de $b$
- On dit que $f$ est continue sur $[a,b]$, si elle est continue sur $]a,b[$ et à droite de $a$ et à gauche de $b$

**Remarque**

- Si $f$ est continue sur $[a,b]$, et sur $[b,c]$ alors elle est continue sur $[a,c]$
- Généralement : si $f$ est continue sur $I$ et sur $J$ et $I \cap J \neq \varnothing$, alors $f$ est continue sur $I \cup J$

### b Les opérations sur les fonctions continues

**Propriété**

1 Si $f$ et $g$ deux fonctions continue en $a$ alors :
- $f + g$
- $f \times g$
- $|f|$

Sont continue en $a$

2 Si $f$ et $g$ deux fonctions continues en $a$ et $g(a) \neq 0$ alors :
- $\frac{1}{g}$
- $\frac{f}{g}$

Sont continue en $a$

3 si $f$ une fonction continue en $a$ et $f(a) \geq 0$ alors : la fonction $\sqrt{f}$ est continue en $a$

### Remarque

la propriété précédente reste vraie soit à droite de $a$, à gauche de $a$ où sur un intervalle $I$ ( En tenant compte des conditions)

**Résultat** :

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- La fonction $x \to \tan(x)$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ ; avec $k \in \mathbb{Z}$

# III Image d'un intervalle par une fonction continue

## 1 Image d'un segment (intervalle fermé)

**Théorème**

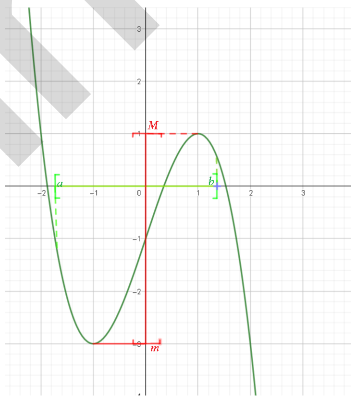
L'image d'un segment $[a,b]$ par une fonction continue est le segment $[m,M]$ où : $m = \underset{x\in[a,b]}{min} f(x)$ et $M = \underset{x\in[a,b]}{max} f(x)$

La courbe ci-contre est

la courbe de la fonction

$f(x) = -x^3 + 3x - 1$

$f([a,b]) = [m,M]$




**Cas particulier :**

- Si $f$ est continue croissante sur $[a,b]$ alors : $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$
- Si $f$ est continue décroissante sur $[a,b]$ alors : $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$

## 2 Image d'un intervalle

### a Théorème général

**Théorème**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

### Remarque

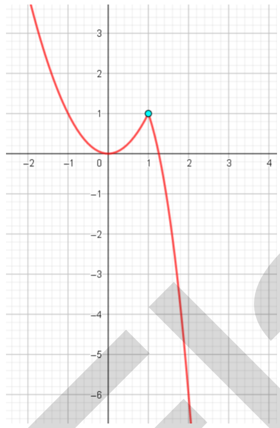
l'intervalle $I$ et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme

Dans le cas de la courbe ci-contre

$f(]0,2]) = [-6,1]$

- $]0,2]$ est un intervalle semi-ouvert
- $[-6,1]$ est un intervalle fermé

De même on a : $f(]-1,1]) = [0,1]$



## b cas d'une fonction strictement monotone

| L'intervalle $I$ | $f(I)$ : $f$ strictement croissante | $f(I)$ : $f$ strictement croissante |
|---|---|---|
| $[a,b]$ | $[f(a), f(b)]$ | $[f(b), f(a)]$ |
| $]a,b]$ | $]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)]$ | $[f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$ |
| $[a,b[$ | $[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$ | $]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)]$ |
| $]a,b[$ | $]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$ | $]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$ |
| $[a,+\infty$ | $[f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$ | $]\lim\limits_{x\to+\infty[} f(x), f(a)]$ |
| $]-\infty,b[$ | $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$ | $]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)]$ |
| $]-\infty,+\infty[$ | $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$ | $]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$ |

### Remarque

Si $f$ n'est pas strictement monotone sur $I$, on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant l'intervalle $I$ en intervalle où $f$ est strictement monotone et on utilise la propriété $f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)$

**Application**

1. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$
   - a. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$
   - b. Déterminer les images des intervalles suivants : $]-1,0]$ ; $[1,2]$ ; $[4,5[$ ; $[-3,+\infty[$
2. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{a}\right\}$ par : $g(x) = \frac{-2ax-1}{ax+1}$ ;

avec $(a \in \mathbb{R}^*)$

a Étudier les variations de $g$ selon les valeurs de $a$

b On pose $a > 1$. Déterminer les images des intervalles suivants : $\left[-a-2, -a-\frac{1}{a}\right]$ ; $\left]\frac{1}{a}, a^2\right]$ et $[a, +\infty[$

# IV Composition de deux fonctions

## 1 Continuité de la composition de deux fonctions

**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $g$ une fonction définie sur l'intervalle $f(I)$ et $x_0$ un élément de $I$

- Si $f$ est continue en $x_0$ et $g$ continue en $f(x_0)$ alors $gof$ est continue en $x_0$
- Si $f$ est continue sur $I$ et $g$ continue sur $f(I)$ alors $gof$ est continue sur $I$

**Exemple**

1 La fonction $x \to \sqrt{\dfrac{1}{x^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$ car :

- $u : x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $]1, +\infty[$
- $v : x \to \sqrt{x}$ est continue sur $u(]1, +\infty[) = \mathbb{R}^+$

2 $x \to x^4 + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule sur $\mathbb{R}$ donc $x \to \frac{1}{x^4+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

3 La fonction $x \to \cos\left(\frac{1}{x^4+2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car :

- $x \to x^4 + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule sur $\mathbb{R}$ donc $x \to \frac{1}{x^4+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \to \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

4 Les fonctions $x \to \sqrt{x^2-4x+9}$ ; $x \to \sin\left(\frac{x^3+2x-1}{x^2+1}\right)$ ; $x \to \sqrt{\frac{1}{x^2-x+1}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$

## 2 Limite de $gof$

**Théorème**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert pointé de centre $x_0$ et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Si $g$ une fonction continue sur $l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (gof)(x) = g(l)$

**Application**

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to 0} \cos\left(\pi \frac{\sin(4x)}{3x}\right)$
2. $\lim_{x \to x_0} \sin\left(\pi x\left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\right)$

# V Théorème des valeurs intermédiaires

## 1 Cas général

**Théorème**

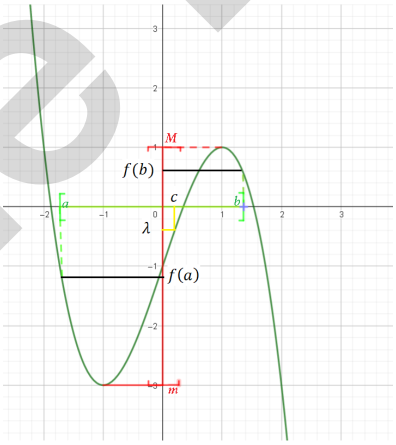
Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$
Pour tout $\lambda$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$
En d'autre termes : l'équation $f(x) = \lambda$ d'inconnue $x$ admet au moins une solution dans $[a,b]$ pour tout $\lambda$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ ; $a$ et $b$ deux éléments de $I$ tel que $a < b$

Soit $\lambda$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Donc $\lambda \in f([a,b])$

Donc $\lambda$ admet au moins un antécédent $c$ dans l'intervalle $[a,b]$




D'où pour tout $\lambda$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$

**Corollaire**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$
Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$

## 2 Cas $f$ strictement monotone

**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue strictement monotone sur $[a,b]$
Pour tout $\lambda$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$

**Corollaire**

Soit $f$ une fonction continue strictement monotone sur $[a,b]$
Si $f(a)\times f(b)<0$ alors il existe un et un seul $c$ dans $[a,b]$ tel que $f(c)=0$

**Exemple**

Montrons que l'équation $x^3+2x=1$ admet une racine unique dans $\alpha\in\mathbb{R}$, puis vérifier que $\alpha\in[0,1]$

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+2x-1$

- $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)
- $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $(\forall x\in\mathbb{R})$ ; $f'(x)=3x^2+2$
  $(\forall x\in\mathbb{R})$ ; $f'(x)>0$ don $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $0\in f(\mathbb{R})$ car :
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$
  $f(\mathbb{R})=]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=\mathbb{R}$ ($f$ es strictement croissante)

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in\mathbb{R}$

$f(x)=0\Leftrightarrow x^3+2x-1=0\Leftrightarrow x^3+2x=1$

Donc : l'équation $x^3+2x=1$ admet une racine unique dans $\alpha\in\mathbb{R}$

Comme $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(\alpha)=0 \\ f(1)=2 \end{cases}$ donc : $f(0)<f(\alpha)<f(1)$

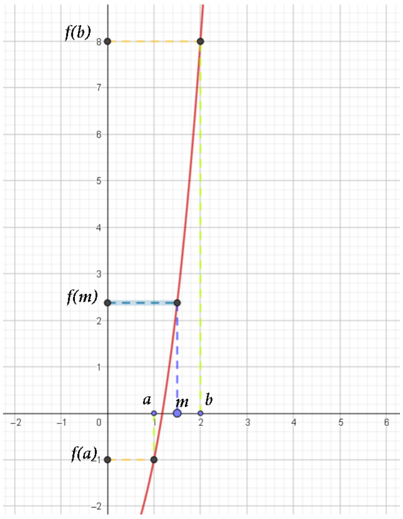
Et puisque $f$ est une fonction strictement croissante alors $0<\alpha<1$

**Application**

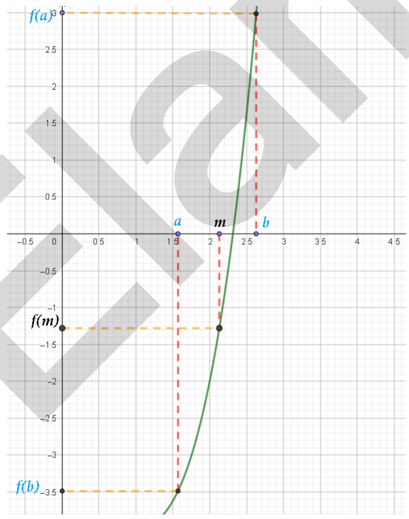
1. Montrer que : $\exists! c\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ / $\sqrt{c+1}=\frac{-2c}{c+1}$
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $(\forall x\in\mathbb{R})$ $((f(x))^2=1$
   Démontrer que $f=1$ ou $f=-1$
3. soient $g$ et $\varphi$ deux fonctions définie sur$[0,1]$ telle que $\varphi(0)=\varphi(1)$ et $g(x)=\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right)-\varphi(x)$.
   Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$
4. Soit $\phi$ une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^*$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\phi(x)}{x}<1$
   Montrer que l'équation $\phi(x)=x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^*$

## 3 Principe de la méthode de dichotomie

Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a,b]$ telle que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $[a,b]$
Pour déterminer un encadrement du nombre $\alpha$, on démarre donc en ayant localisé la racine $\alpha$ entre $a$ et $b$ $(a<\alpha<b)$ ; et on sait par exemple que sur cet intervalle , la fonction $f$ est continue, strictement croissante
On calcule alors le centre $m$ du segment $[a,b]$ $(m=\frac{a+b}{2})$, puis son image par la fonction $f$ : $f(m)$ et on la compare à 0
Deux cas peuvent alors se produire :




Cas où $f(m)>0$
On a alors $a<\alpha<m$. On reprend la bissection de l'intervalle en posant
$a=a$ et $b=m$
puis en continue comme précédemment




Cas où $f(m)<0$
Ona alors $m<\alpha<b$. On reprend la bissection de l'intervalle en posant
$a=m$ et $b=b$
puis en continue comme précédemment

**EXEMPLE**

Soit $f$ une fonction définie par $f(x)=x^3+2x-1$ On sait que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]0,1[$, déterminons un encadrement de $\alpha$ de longueur 0.25

Soit $c_1=\frac{1}{2}$ le centre de l'intervalle $[0,1]$ Comme : $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)>0 \\ f(1)<0 \\ f(1)>0 \end{cases}$

Donc $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ d'amplitude $\frac{1-0}{2}=0.5$

Soit $c_2=\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$ le centre de l'intervalle $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ Comme : $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)>0 \\ f(0)<0 \\ f\left(\frac{1}{4}\right)<0 \end{cases}$

Donc $\alpha \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$ d'amplitude $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

# VI Fonctions réciproques

**Activité**

Soit $f$ une fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1$

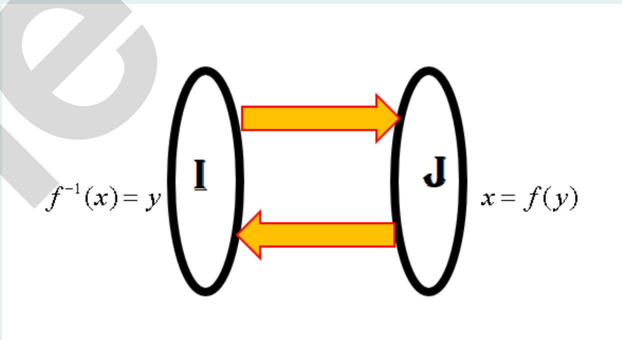
1. Étudier la continuité de $f$ sur $I$
2. Montrer que $f$ est strictement croissante sur $I$
3. Calculer $J = f(I)$
4. On considère l'équation $f(y) = x$, montrer que $y = \sqrt{x+1}$
5. Soit $g$ la fonction définie sur $J$ par : $g(x) = \sqrt{x+1}$
   Comparer $f(1)$ et $g(0)$ ; $f(2)$ et $g(3)$ ; $f(3)$ et $g(8)$. Que peut-on déduire

**Théorème**

Si $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ alors : $f$ admet une fonction réciproque notée $f^{-1}$ définie sur $J = f(I)$ à valeur dans $I$ et on a :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\forall x \in J)(fof^{-1})(x) = x \\ (\forall x \in I)(f^{-1}of)(x) = x \end{cases}$$

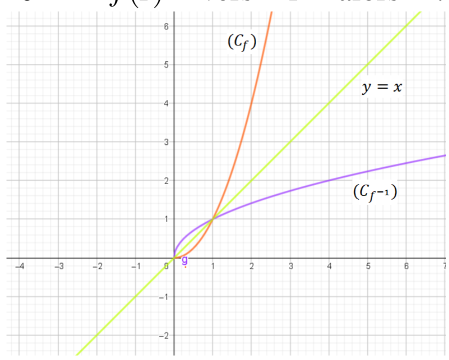



► Si $b \in f(I)$ alors l'équation $f(x) = b$ admet une solution unique dans $I$

**Propriété**

Si $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ de $J = f(I)$ vers $I$ alors :

- ► $(C_{f^{-1}})$ et $(C_f)$ les courbe respectivement des fonction $f$ et $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$
- ► $f^{-1}$ à la même monotonie sur $J$ que celle de $f$ sur $I$



**Application**

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction $f$ réalise une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ à déterminer, puis déterminer une expression de $f^{-1}$ pour tout $x \in J$
   - $f(x) = x^2 - 2x + 5$ et $I = [1, +\infty[$
   - $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ et $I = ]-\infty, 2[$
   - $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$ et $I = ]-\infty, 0[$
   - $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ et $I = [0, \sqrt{2}]$
2. On considère la fonction $f$ définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$
   a. Montrer que la fonction $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction $g^{-1}$
   c. Calculer $f^{-1}(x)$ $(\forall x \in J)$

# VII Fonction racine $n$-ème

## 1 Définition et règle de calcul

**Activité**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. Montrer que $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
3. En déduire que la fonction $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

**Définition 1.4** Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}^*$ la fonction $x \longrightarrow x^n$ est continue strictement croissant sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ s'appelle la fonction racine $n$-ième est se noté $\sqrt[n]{\ }$

**Conséquence de la définition :**

- La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\sqrt[n]{x} \geq 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $(\forall y \in \mathbb{R}^+)$ $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$
- La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est continue strictement croissante alors
  - $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $(\forall y \in \mathbb{R}^+)$ $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
  - $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $(\forall y \in \mathbb{R}^+)$ $\sqrt[n]{x} \leq y \Leftrightarrow 0 \leq x \leq y^n$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $(\sqrt[n]{x})^n = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $(\forall p \in \mathbb{N})$ $(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = l \geq 0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

**Règle de calcul :**

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^*_+)\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall p \in \mathbb{N}^*)\ \sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall p \in \mathbb{N}^*)\ \sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}$

## Remarque

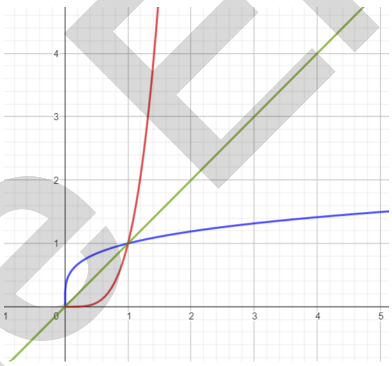
$i)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$
$ii)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \sqrt[1]{x} = x$

**La courbe de la fonction $\sqrt[n]{\ }$**

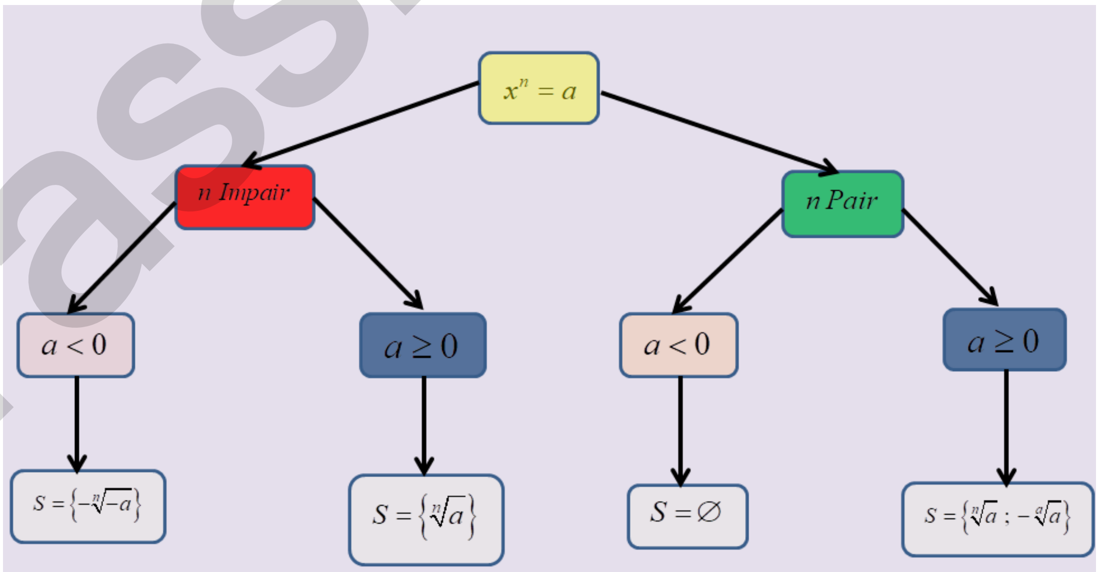
Voici la courbe de la fonction $f : x \to x^4$

sur $[0, +\infty[$ et la courbe de

sa fonction réciproque $f^{-1} : x \to \sqrt[4]{x}$



**L'équation $x^n = a$ ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$)**



**Application**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

- ♦ $x^5 = 1$
- ♦ $(x^2-1)^3 = -27$
- ♦ $\sqrt[5]{x} - 5\sqrt[10]{x} + 6 = 0$
- ♦ $\sqrt[8]{x} - x = 0$
- ♦ $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

## 2 L'expression conjuguai

**Ordre 3 :**

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\,;\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\,;\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

**Ordre 4 :**

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\,;\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

A remarque qu'on ne peut pas factoriser : $x^4 + y^4$

**Application**

1 Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}} \times \sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{3}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}}}$$

2 Rendre le dénominateur rationnel :

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2} \qquad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

3 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{20x^2+7}-3}{x^2+x-2} \ ; \ \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{3x-4}-\sqrt{x}}{x-4} \ ; \ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{20x-4}-2}{2x^2+x-3} \ ; \ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{2x-1}-1}{\sqrt[4]{2x+8}-2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} \ ; \ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} \ ; \ \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{25+x}-3}$$

1.Chapter 1 Limite et continuité

## 3 Puissance rationnelle

Puissance entier

Soit $x$ un réel et $n$ un entier naturel non nul on a :

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}} \quad \text{et } x^0 = 1 \text{ si } x \neq 0$$

Puissance rationnelle

**Propriété**

Pour tout réel $x$ et pour tout entier naturel $q$ non nul on a : $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$

**Propriété**

Soit $x$ un réel et $r$ un rationnel $(r \in \mathbb{Q})$ avec $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on a : $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$

**Propriété**

Soit $x$ et $y$ deux réels positifs, $r$ et $r'$ deux rationnels on a :

- $x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
- $x^{r \times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
- $x^{-r} = x^r = \frac{1}{x^r}$ $(x \neq 0)$
- $x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}}$
- $(xy)^r = x^r \times y^r$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$ $(y \neq 0)$

**Application**

Soient $x$ et $y$ deux réels non nuls, simplifier les nombres suivants :

1. $A = \frac{x^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{1}{6}} \times 9^{\frac{3}{4}}}$
2. $B = \frac{(xy)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[6]{x^{-2}}}{x^{\frac{3}{4}} \sqrt[6]{xy}}$

3 $C = \dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[4]{\frac{x}{y}} \times \sqrt[6]{x^{-4}}}{(yx)^{\frac{1}{4}} \sqrt[12]{xy}}$