La géométrie dans l'espace

I Orthogonalité d'une droite et d'un plan

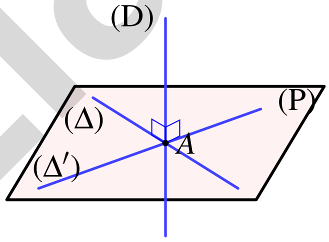
1 Définition

Définition

On dit qu'une droite (D) est perpendiculaire (ou orthogonale) à un plan (P) en un point A, si elle est perpendiculaire, au point A, à deux droites incluses dans le plan (P) et sécantes en A

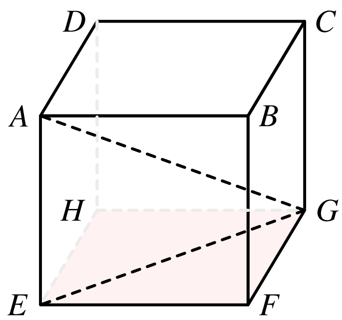
✿ Figure géométrique :

✷ On a $(D)\perp(\Delta)$ et $(D)\perp(\Delta')$ au point A
✷ Et (Δ) et (Δ') sont inclues dans le plan (P)
Alors $(D)\perp(P)$



Exemple

Soit $ABCDEFGH$ un cube
Montrer que $(AE)\perp(EFGH)$



Solution

On a $ABEF$ et $ADHE$ deux carrées, donc
✷ $(AE)\perp(EF)$ en E
✷ $(AE)\perp(EH)$ en E
✷ (EF) et (EH) sont inclues dans le plan $EFGH$ et se coupent en E
Alors, d'aprés la définition, $(AE)\perp(EFGH)$ en E

2 Propriété

Proposition

Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P) au point A, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites de (P) qui passent par A

• Exemple

On considère le cube $ABCDEFGH$ précédent
Montrer que le triangle AEG est rectangle en E

Solution

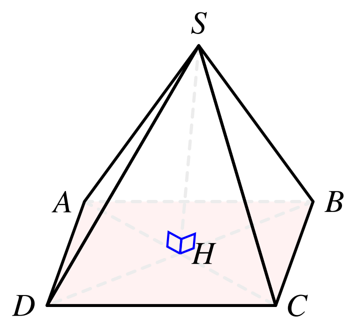
Montrons que le triangle AEG est rectangle
On a $(AE)\perp(EFGH)$ en E
Comme la droite (EG) est inclue dans le plan $(EFGH)$ et passe par le point E
Donc, d'après la proposition ①, $(AE)\perp(EG)$ et cela signifie que le triangle AEG est rectangle en E

3 Théorème de Pythagore dans l'espace

a Théorème de Pythagore direct

• Exemple

La figure, ci-contre, représente une pyramide régulière $SABCD$ à base le carré $ABCD$ et de hauteur $[SH]$ tel que : $AC = BD = 12cm$ et $SH = 12cm$
Calculer BC et SC



Solution

✶ Calculons BC
$ABCD$ est un carré, donc le triangle ABC est rectangle en B
Donc, d'après le Théorème de Pythagore direct on a : $BC^2 + AB^2 = AC^2$
Donc $BC^2 + BC^2 = AC^2$ (car $ABCD$ est un carré, c'est à dire $AB = BC$)
Donc $2BC^2 = AC^2 = 12^2 = 144$
Donc $BC^2 = \dfrac{144}{2} = 72$

Alors $BC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

✶ **Calculons SC**

On a $[SH]$ l'hauteur de la pyramide $SABCD$, donc $(SH)\perp(ABCD)$en H

Or $(HC) \subset (ABCD)$, donc $(SH)\perp(HC)$

Donc le triangle SHC est rectangle en H

Donc, d'après le Théorème de Pythagore direct on a : $SH^2 + HC^2 = SC^2$

Donc $SC^2 = 12^2 + 6^2$ (car $HC = \dfrac{AC}{2}$), c'est à dire $SC^2 = 144 + 36 = 180$

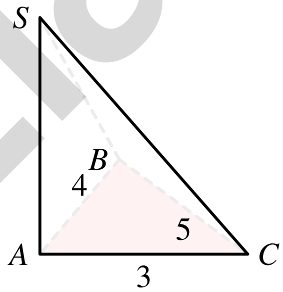
Alors $SC = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

b Théorème de Pythagore réciproque

• Exemple

La figure, ci-contre, représente un tétraèdre $SABC$ à base le triangle ABC tel que : $AC = 3cm$ et $AB = 5cm$

Montrer que le triangle ABC est rectangle



Solution

Montrons que ABC est rectangle

On a $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, et $BC^2 = 5^2 = 25$

Donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Alors d'après le Théorème de Pythagore réciproque, le triangle ABC est rectangle en A

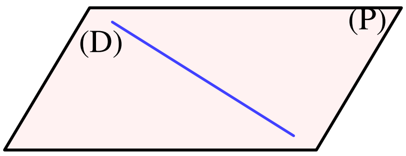
II Parallélisme d'une droite et un plan

1 Définition

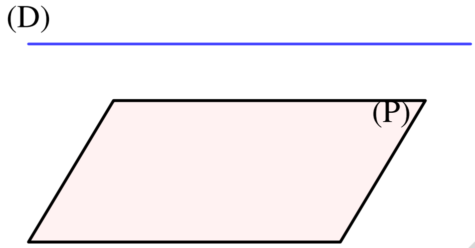
Définition

On dit qu'une droite (D) est parallèle à un plan (P)si la droite (D) est inclue dans le plan (P) ou si (D) et (P) n'ont aucun point commun

✿ Figure géométrique :



$(D) \subset (P) \Rightarrow (D) \parallel (P)$



$(D) \parallel (P)$
car aucun point commun

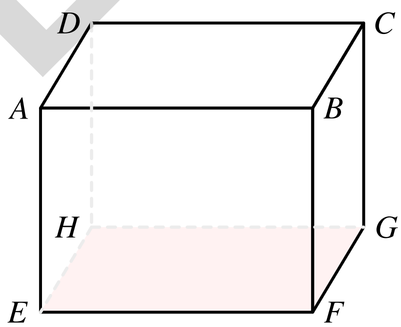
2 Propriété

Proposition

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si elle est parallèle à une droite (Δ) inclue dans le plan (P)

Exemple

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède
Montrer que $(AB) \parallel (EFGH)$

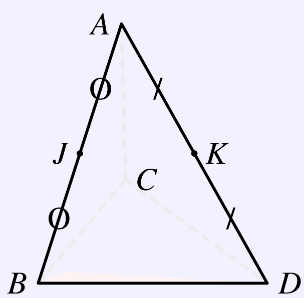


Solution

Montrons que $(AB) \parallel (EFGH)$
On a $ABEF$ est un rectangle, donc $(AB) \parallel (EF)$ et $(EF) \subset (EFGH)$
Donc, d'après la proposition 2, $(AB) \parallel (EFGH)$

Application

La figure, ci-contre, représente un tétraèdre $ABCD$
Soit J le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[AD]$
Montrer que $(JK) \parallel (BCD)$



Solution

On considère le triangle ABD

On a $\begin{cases} XJmilieude[\text{AB}] \\ XKmilieude[\text{AD}] \end{cases}$

$Donc, d'aprslapropositiondeladroitepassantepardeuxmilieudansuntriangle, ona$ (JK) $\parallel$ (BD)

$Etcomme$ (BD) $\subset$ (BCD)

$Donc, d'aprslaproposition2, ona$ (JK) $\parallel$ (BCD)

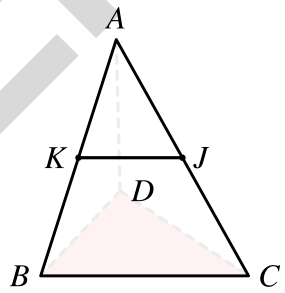
3 Théorème de Thalès dans l'espace

a Proposition directe

• Exemple

On considère la figure, ci-contre, qui représente une pyramide $ABCD$ tel que $(KJ) \parallel (BC)$, $AK = 2$, $AB = 6$ et $BC = 9$

Calculer KJ



Solution

Calculons KJ

On considère le triangle ABC

On a $\begin{cases} K \in [AB] \\ J \in [AC] \end{cases}, telque$ (KJ) $\parallel$ (BC)

$Donc, d'aprsleThormedeThals$

$Direct, ona \dfrac{AK}{AB} = \dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{KJ}{BC}$

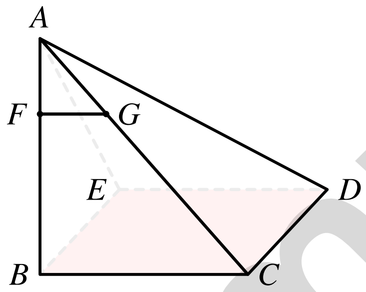
Donc $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{KJ}{BC}$, c'est à dire $\dfrac{2}{6} = \dfrac{KJ}{9}$

Donc $KJ = \dfrac{2 \times 9}{6} = \dfrac{18}{6} = 3$

b Proposition réciproque

• Exemple

On considère la figure, ci-contre, tel que $AF = 3$,
$AB = 9$, $AG = 4$ et $AC = 12$
Montrer que $(FG) \parallel (BC)$



Solution

Montrons que $(FG) \parallel (BC)$
On a $\frac{AF}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ et $\frac{AG}{AC} = \frac{4}{12}\frac{1}{3}$
Donc $\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC}$
on considère le triangle ABC

On a $\begin{cases} F \in [AB] \\ G \in [AC] \end{cases}$ $etlespoints$A,FetB$ontlemmeordrequel$
$Etona$ $\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC}$
Donc, d'après le théorème de Thalès réciproque, on a $(FG) \parallel (BC)$

III Agrandissement et réduction

1 Définition

Définition

On dit qu'une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure lorsque leurs longueurs sont proportionnelles de rapport k
C'est à dire qu'on obtient le deuxième solide en multipliant les arêtes du premier par le nombre positif non nul k $(k \neq 1)$
Le nombre k est appelé coefficient d'agrandissement ou de réduction

!

★ Si $k > 1$, il s'agit d'un agrandissement
★ Si $0 < k < 1$, il s'agit d'une réduction
★ Si k est le rapport d'agrandissement, alors $\frac{1}{k}$ est le coefficient de réduction

2 L’influence de l’agrandissement (la réduction) sur les aires et le volumes

Proposition

Dans un agrandissement ou une réduction, de rapport k, dans l’espace
✯ Les longueurs sont multipliées par k
✯ Les aires sont multipliées par k^2
✯ Les volumes sont multipliés par k^3

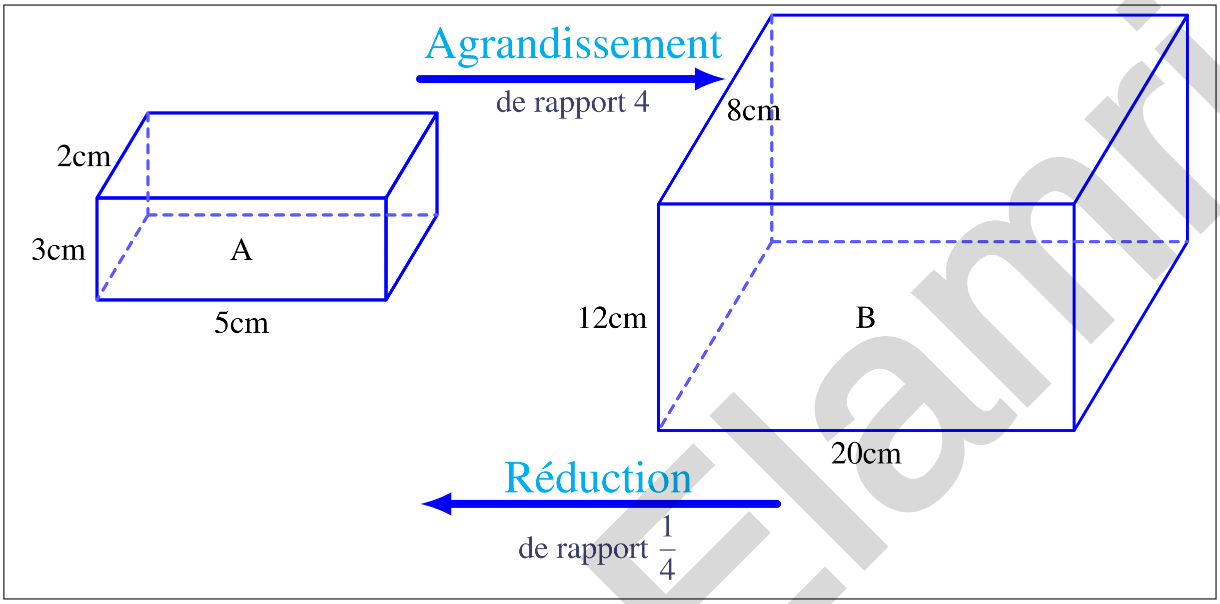
Autrement dit :

On note ℓ : pour les longueurs, A : pour les aires, et v : pour les volume

Solide d’origine	Agrandissement ou réduction de rapport k	Solide obtenu
ℓ A v	$\ell' = k\ell$ $A' = k^2 A$ $v' = k^3 v$	ℓ’ A’ v’

• Exemple

On considère la figure suivante



✷ Le parallélépipède B est un agrandissement, de rapport $k = 4$, du parallélépipède A (car les longueurs sont multipliées par 4)

Et A est une réduction de B de rapport $\frac{1}{k} = \frac{1}{4}$

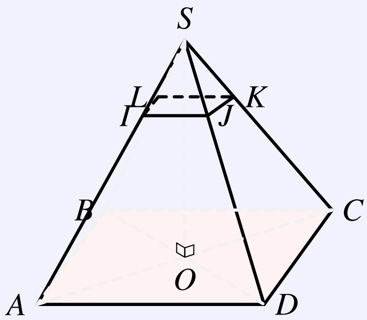
✷ L'aire de A est : $\mathrm{A} = 2(ab+ac+bc) = 2(5\times3+5\times2+3\times2) = 2\times31 = 62cm^2$
Alors, l'aire de B est $\mathrm{A}' = k^2\times\mathrm{A} = 4^2\times62 = 16\times62 = 992cm^2$
✷ Le volume de A est : $v = abc = 5\times3\times2 = 30cm^3$
Alors, l'aire de B est $v' = k^3\times v = 4^3\times30 = 64\times30 = 1920cm^3$

Remarque

Des fois, pour déterminer le rapport d'agrandissement ou de réduction, on emploie le théorème de Thalès direct

Application

On considère la figure, ci-contre, qui représente une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ et de hauteur $[SO]$, tel que $BC = 6cm$ et $SO = 4cm$
I ; J ; K et L sont, respectivement, les milieux des segments $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$ tel que $SI = SJ = SK = SL = \frac{1}{3}SA$



1. Montrer que $IJ = 2cm$
2. Sachant que la pyramide $SABCD$ est un agrandissement de la pyramide $SIJKL$

a Déterminer le coefficient k de cet agrandissement

b Calculer l'aire a du carrée $ABCD$ et déduire l'aire a' du carrée $IJKL$

3 Calculer le volume v de la pyramide $SABCD$ et déduire le volume v' de la pyramide $SIJKL$

4 Déduire le volume V du solide $ABCDIJKL$

Solution

1 Montrons que $IJ = 2cm$

On a $SI = \frac{1}{3}SA$, donc $\frac{SI}{SA} = \frac{1}{3}$

Et on a $SJ = \frac{1}{3}SA = \frac{1}{3}SD$ (car $SABCD$ est une pyramide régulière et donc $SA = SD$), d'ou $\frac{SJ}{SD} = \frac{1}{3}$

Alors $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD} = \frac{1}{3}$

On considère le triangle ASD

On a $\begin{cases} I \in [SA] \\ J \in [SD] \end{cases}$ $et les points S, I et A ont le mme ordre que les points S, J et D et on a$ $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD}$

Donc, d'après le théorème de Thalès réciproque, on a $(IJ) \parallel (AD)$

Alors, d'après, le théorème de Thalès direct, on a $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD} = \frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$

Donc $\frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$, c'est à dire $\frac{IJ}{6} = \frac{1}{3}$ ($AD = BC = 6cm$)

Donc $IJ = \frac{1}{3} \times 6 = 2cm$

2 a Déterminons le rapport d'agrandissement

On a la pyramide $SABCD$ est un agrandissement de la pyramide $SIJKL$

Donc la base $ABCD$ est un agrandissement de la base $IJKL$

Donc, le coefficient d'agrandissement est $k = \frac{AD}{IJ} = \frac{6}{2} = 3$

b ✪ Calculons l'aire de $ABCD$

L'aire du carrée $ABCD$ est

$a = AB^2 = 6^2 = 36cm^2$

✪ Déduisons l'aire de $IJKL$

On a le carrée $IJKL$ est une réduction du carrée $ABCD$ de rapport $k = \frac{1}{3}$

Donc, l'aire du carrée $IJKL$ est $a' = k^2 \times a = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 36 = \frac{1}{9} \times 36$

$a' = \frac{36}{9} = 4cm^2$

3 ✪ Calculons le volume de $SABCD$

Le volume de la pyramide $SABCD$ est : $v = \frac{1}{3} \times SO \times AB^2 = \frac{1}{3} \times SO \times a$

$v = \frac{1}{3} \times 4 \times 36 = \frac{4 \times 36}{3} = \frac{144}{3} = 48cm^3$

✪ Déduisons le volume de $SIJKL$

La pyramide $SIJKL$ est une réduction de la pyramide $SABCD$ de rapport $k = \frac{1}{3}$

Donc, le volume de la pyramide $SIJKL$ est $v' = k^3 \times v = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 48$

Alors $v' = \frac{1}{27} \times 48 = \frac{48}{27} = \frac{16}{9}cm^3$

4 Déduisons le volume de $ABCDIJKL$

On a $v = v' + V$, donc $V = v - v'$

Donc $V = 48 - \frac{16}{9} = \frac{432 - 16}{9}$

Alors $V = \frac{416}{9}cm^3$