Produit vectoriel dans $\mathcal{V}_3$

Série d'exercices

Exercice

- 1 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ et $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 4$ et $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
Calculer $\|\vec{v}\|$.
- 2 Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que : $\|\vec{a}\| = 4$ et $\|\vec{b}\| = 9$ et $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18\sqrt{3}$.
Calculer $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$.

Exercice

- 1 On considère les vecteurs : $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{w} = \vec{j} + \vec{k}$.
Déterminons les coordonnées du vecteur : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{w}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:
- 2 Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points : $A(1; 2; 3)$; $B(0; -1; 2)$; $C(3; -2; 1)$.
Calculer : $\vec{OA} \wedge \vec{BC}$ et $\vec{AB} \wedge \vec{BC}$.

Exercice

Calculer l'aire du triangle ABC dans chacun des cas suivants :

- 1 $A(-1; 2; 1)$; $B(-1; 0; 2)$; $C(2; -1; 0)$.
- 2 $A(2; 1; -1)$; $B(0; 4; 1)$; $C(3; 1; -2)$.

Exercice

- 1 Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) dans chacun des cas suivants :
 - a $A(-1; 2; 1)$; $B(-1; 0; 2)$; $C(2; -1; 0)$
 - b $A(1; 3; 5)$; $B(0; 0; 1)$; $C(1; 3; 5)$.

- 2 On considère les deux points : $E(3; -1; 1); F(1; 0; 3)$. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEF) .

Exercice

Calculer la distance du point M à la droite (Δ) dans chacun des cas suivants :

- 1 $M(3; 2; 1)$ et $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.
- 2 $M(3; -1; 1)$ et $(\Delta) : \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$

Exercice

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points : $A(1; 2; 3); B(3; 0; -3); C(5; 2; 6)$.

- 1 Déterminer les coordonnées de $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
- 2 Calculer la hauteur du triangle ABC issue de B .
- 3 Déterminer une équation cartésienne de (ABC) .
- 4 Calculer la distance du point O à la droite (AB) .

Exercice

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points : $A(1; 0; 0); B(0; 1; 0); C(0; 0; 1)$.

- 1
 - a Déterminer les coordonnées de $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
 - b Déterminer une équation cartésienne de (ABC) .
- 2
 - a Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par O et orthogonal à (ABC) .
 - b Déterminer l'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) .
- 3 Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M de l'espace tel que : $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = (\sqrt{3} - 1) (\vec{i} + \vec{j}) - \vec{k}$
 - a Montrer que le point $\Omega(1; 1; \sqrt{3} - 1)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{D}$.
 - b En déduire que $\mathcal{D}$ et la droite passant par Ω et dirigée par le vecteur $\vec{AB}$.

- 4 Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω est de rayon $R = 1$.
- a Montrer que les plans (ABC) , (OAC) et (OBC) sont tangents à la sphère $\mathcal{S}$.
 - b Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan (OAB) .