Chapitre

Parallélogramme

Cours 1AC

I Le parallélogramme

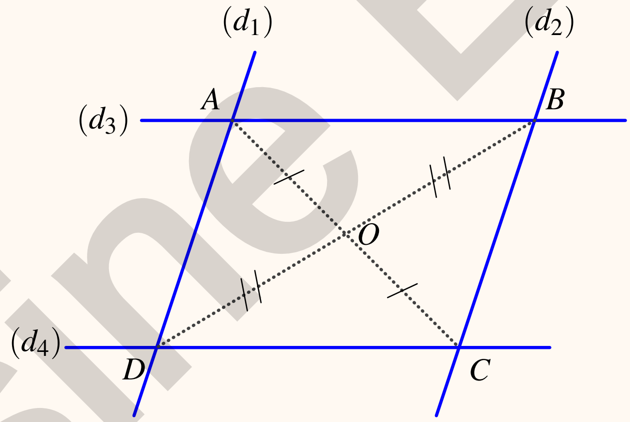
Activité

Soient A, B et D trois points non alignés

1. Tracer la parallèle (Δ) à la droite (AB) passant par D
2. Tracer la parallèle (Δ') à la droite (AD) passant par B
3. Placer le point C d'intersection des droites (Δ) et (Δ')
   On dit que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Activité

Soit $ABCD$ un parallélogramme et O est le milieu des segments $[AC]$ et $[BD]$
On considère la symétrie centrale de centre O

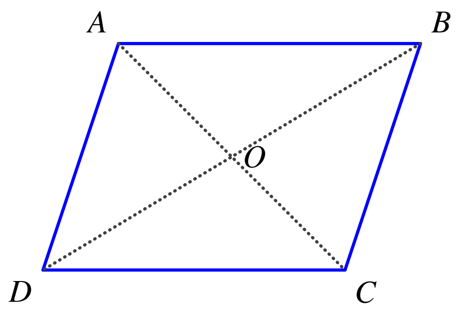


1. Quel est le symétrique de la droite (d_1) par rapport au point O ?
2. Montrer que : $(d_1) \parallel (d_2)$
3. Quel est le symétrique de la droite (d_3) par rapport au point O ?
4. Montrer que : $(d_3) \parallel (d_4)$
5. Compléter : Dans un parallélogramme , les côtés opposés sont ....

Définition

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles

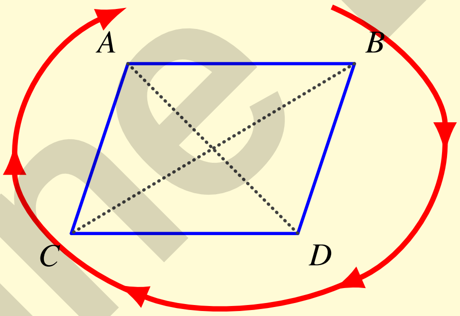
Exemple



★ Les droites (AB) et (DC) sont parallèles
★ Les droites (AD) et (BC) sont parallèles
★ Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Remarque

Il faut faire attention lorsque l'on nomme un parallélogramme
Ici, il se nomme $ABDC$, il suffi de suivre le sens de la flèche pour le nommer



Application

Dans chaque cas, construire un parallélogramme : ❶ $LISE$ tel que : $LI = 5cm$ et $IS = 2.5cm$ en utilisant l'equere et la règlre graduée
❷ $MARC$ tel que : $MR = 7cm$ et $CA = 6cm$ en utlilisant la règle graduée
❸ $NOAH$ tel que : $NO = 3cm$ et $NA = 8cm$ en utilisant le compas et la règle graduée

II Propriétés des diagonales

Activité

Soit $ABCD$ un parallélogramme
Soit I le milieu de la diagonale $[DB]$

1. Quel est le symétrique du point B par rapport à I ?
2. Déterminer les symétriques des droites (BC) et (DC) par rapport à I

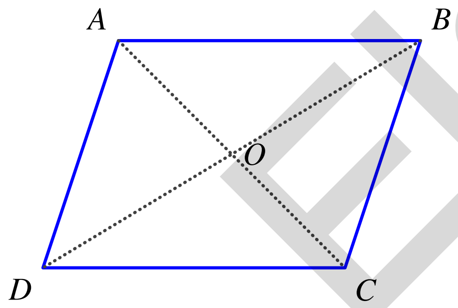
3 a En déduire le symétrique du point C par rapport à I
b Que peut-on en déduire ?

1 Propriété directe

Propriété

Si un quadrilatère est un parallélogramme , alors ses diagonales se coupent en leur milieu

Exemple



$ABCD$ est un parallélogramme
Ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en laur milieu O
O est le milieu de $[AC]$ et $[BD]$

Remarque

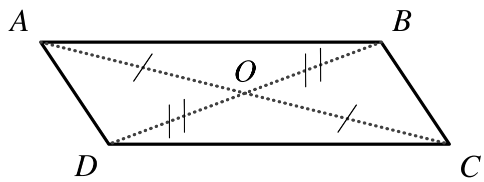
On appelle le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme , son centre

2 Propriété réciproque

Propriété

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme

Exemple



Les deux diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en O qui est le milieu des diagonales $[BD]$ et $[AC]$

Donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Application

Soit ABC un triangle et I le milieu su degment $[AC]$

1. Construire le point D le symétrique du point B par rapport au point I
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

III Propriétés des côtés

Activité

Soient A, B et O trois points non alignés
Soit C et D les symétriques respectifs de A et B par rapport à O

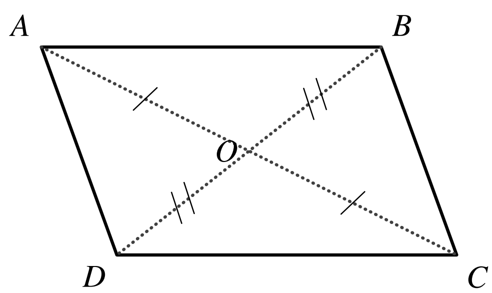
1. Faire une figure
2. a. Montrer que $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD \parallel (BC)$
   b. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$
3. a. Montrer que $AB = DC$ et $AD = BC$
   b. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$

1 Propriété directe

Propriété

Si un quadrilatère est un parallélogramme , alors ses côtés opposés ont la même longueur

• Exemple



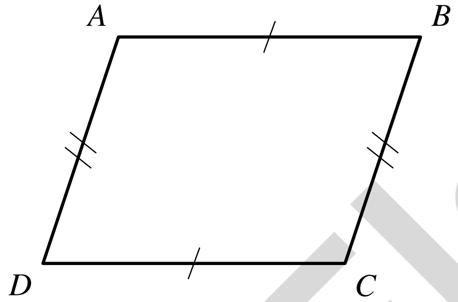
$ABCD$ est un parallélogramme
Ses côtés opposés ont la même longueur
Donc : $AB = DC$ et $AD = BC$

2 Propriété réciproque

Propriété

Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme

Exemple



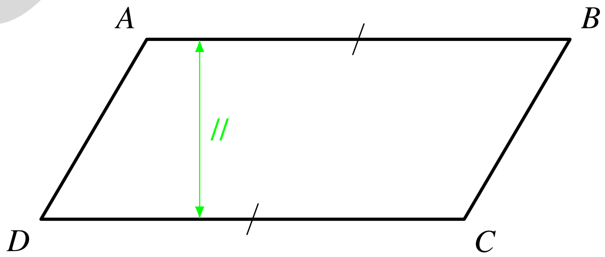
On a : $AB = DC$ et $AD = BC$
Le quadrilatère $ABCD$ a ses côtés opposés de même longueur
Donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

3 Autre propriété

Propriété

Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme

Exemple

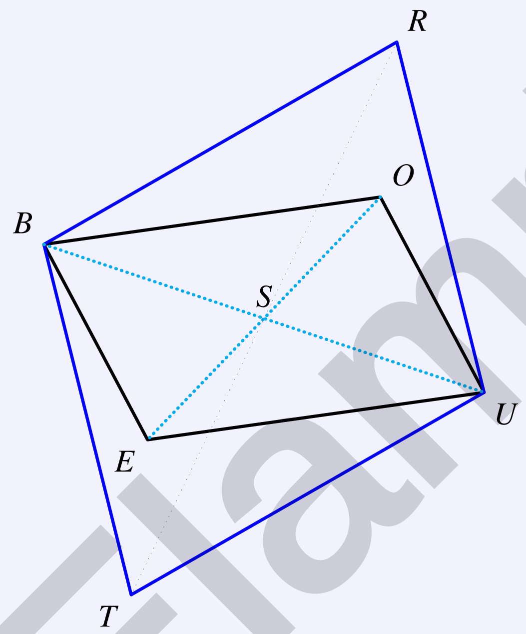


On a : $AB = DC$ et $(AB) \parallel (DC)$
Donc : $ABCD$ est un parallélogramme

Application

On considère la figure ci-contre
Les quadrilatères $BOUE$ et $BRUT$ sont des parallélogrammes

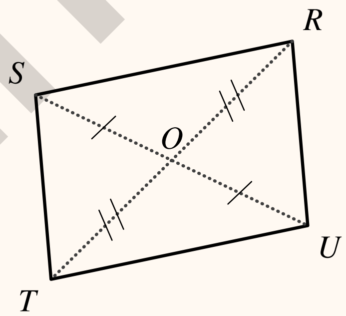
1. Que représente le point S pour le quadrilatère $BRUT$? Pourquoi ?
2. Démontrer que $TE = RO$



IV Propriétés des angles

Activité

Sur la figure suivante sont tracés un parallélogramme , $RSTU$ et son centre O



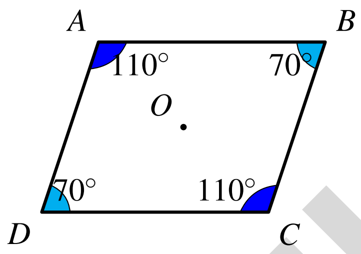
Dans la symétrie de centre O :
☆ Le symétrique de l'angle $\widehat{URS}$ est : . . . .
☆ Le symétrique de l'angle $\widehat{RUT}$ est : . . . .
☆ Le symétrique de l'angle $\widehat{TSR}$ est : . . . .
☆ Le symétrique de l'angle $\widehat{UTS}$ est : . . . .

1 Propriété directe

Propriété

Si un quadrilatère est un parallélogramme , alors ses angles opposés ont la même mesure

Exemple



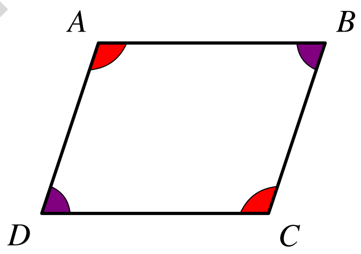
$ABCD$ est un parallélogramme
Ses angles opposés ont la même mesure
On a : $\widehat{BAD} = \widehat{DCB}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{ADC}$

2 Propriété réciproque

Propriété

Un quadrilatère dont les angles opposés sont de même mesure est un parallélogramme

Exemple



On a : $\widehat{BAD} = \widehat{DCB}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{ADC}$
Les angles opposés du quadrilatère $ABCD$ ont la même mesure
Donc : le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

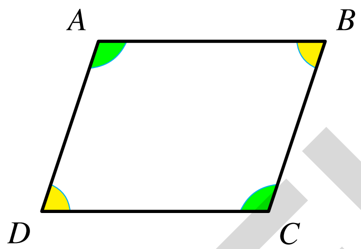
3 Propriétés supplémentaires

Propriété

Les angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires

• Exemple

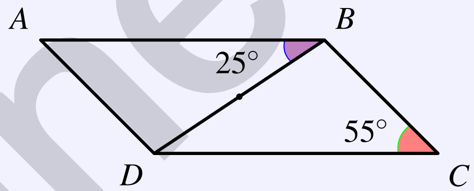
On a $ABCD$ un parallélogramme



Alors : $\widehat{ADC} + \widehat{DAB} = 180°$ et $\widehat{DCB} + \widehat{CBA} = 180°$

Application

Soit $ABCD$ u parallélogramme tel que : $\widehat{ABD} = 25°$ et $\widehat{BCD} = 55°$



Calculer la mesure de l'angle $\widehat{DBC}$

Solution

$$\begin{aligned} \widehat{DBC} &= 180° - 55° - 25° \\ &= 180° - 80° \\ &= 100° \end{aligned}$$

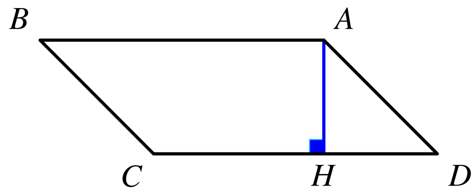
V La hauteur d'un parallélogramme

Définition

Une hauteur d'un parallélogramme est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé
Couramment, la hauteur se restreint au segment joignant le sommet au côté opposé

• Exemple

Soit $ABCD$ un parallélogramme
Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (DC)



La droite (AH) est une hauteur du parallélogramme $ABCD$ relativement aux côtés $[AB]$ et $[DC]$