Fonctions linéaires et fonctions affines

I Fonction linéaire

1 Définition

Définition

Soit a un nombre réel
Toute relation qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel ax s'appelle fonction linéaire de coefficient a et on écrit $f(x) = ax$
On dit que ax est l'image de x par la fonction f

2 Exemples

Exemple

Soient f, g et h des fonctions linéaires définies par : $f(x) = \frac{1}{3}x$, $g(x) = 0x$ et $h(x) = -\sqrt{5}x$

1. Déterminer le coefficient des fonctions f, g et h
2. Calculer : $f(0)$, $g(-1)$ et $h(\sqrt{3})$
3. Calculer l'image de 3 par la fonction f
4. Calculer le nombre d'image -8 par la fonction h

Solution

1. f est une fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{3}$
   g est une fonction linéaire de coefficient 0
   h est une fonction linéaire de coefficient $-\sqrt{5}$
2. Calculons $f(0)$, $g(-1)$ et $h(\sqrt{3})$
   $f(0) = \frac{1}{3} \times 0 = 0$
   $g(-1) = 0 \times (-1) = 0$
   $h(\sqrt{3}) = -\sqrt{5} \times \sqrt{3} = -\sqrt{5 \times 3} = -\sqrt{15}$
3. Calculons l'image de 3 par f
   On a $f(3) = \frac{1}{3} \times 3 = \frac{3}{3} = 1$
   Donc l'image de 3 par la fonction f est 1
4. Calculons le nombre d'image -8 par h
   Résolvons l'équation $h(x) = -8$
   L'équation $h(x) = -8$ est respectivement équivalente à $-\sqrt{5} \times x = -8$

C'est à dire $x = \frac{-8}{-\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$

Donc le nombre d'image -8 par la fonction h est $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

3 Propriétés

Proposition

Coefficient d'une fonctio linéaire Si f est une fonction linéaire et x un nombre réel non nul
Donc, le coefficient de la fonction f est $a = \frac{f(x)}{x}$

• Exemple

On considère la fonction linéaire f tel que : $f(2) = 6$
Déterminer l'expression de la fonction f

Solution

Déterminons l'expression de f

On a f est une fonction linéaire donc $f(x) = ax$ et son coefficient est $a = \frac{f(2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Alors $f(x) = 2x$

4 Représentation graphique d'une fonction linéaire

Proposition

Soit $(O;I;J)$ un repère orthonormé
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère O

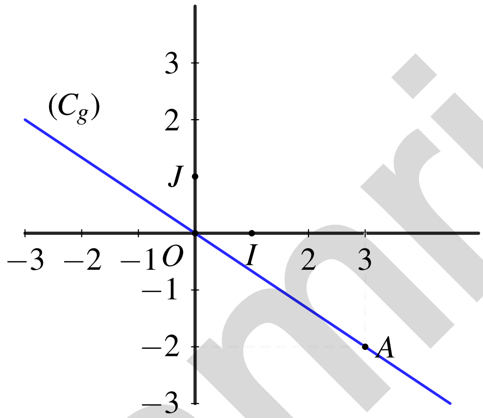
• Exemple

Soit g une fonction linéaire définie par : $g(x) = \frac{-2}{3}x$

1. Calculer $g(3)$
2. Construire la représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé $(O;I;J)$

Solution

1. Calculons $g(3)$
   On a $g(x) = \dfrac{-2}{3}x$
   Donc $g(3) = \dfrac{-2}{3} \times 3 = -2$
2. Construisons la représentation graphique de la fonction g
   On a $g(3) = -2$ et g est linéaire, donc la représentation graphique de la fonction g est une droite qui passe par les points Ọ00 et Ạ3−2



❶ Le point Ṃxy appartient à la représentation graphique d'une fonction linéaire f signifie que $f(x) = y$
❷ Pour déterminer, graphiquement, l'image d'un nombre b par une fonction linéaire f, on construit la droite verticale passante par b qui coupe (C_f) la représentation graphique de la fonction f en un point d'ordonnée c, donc $f(b) = c$
❸ Pour déterminer, graphiquement, le nombre dont l'image est c par une fonction linéaire f, on construit la droite horizontale passante par c qui coupe (C_f) la représentation graphique de la fonction f en un point d'abscisse b, donc $c = f(b)$
❹ Si $f(x)ax$ est une fonction linéaire , donc l'équation de la droite (Δ) la représentation graphique de la fonction f est : $(\Delta) : y = ax$

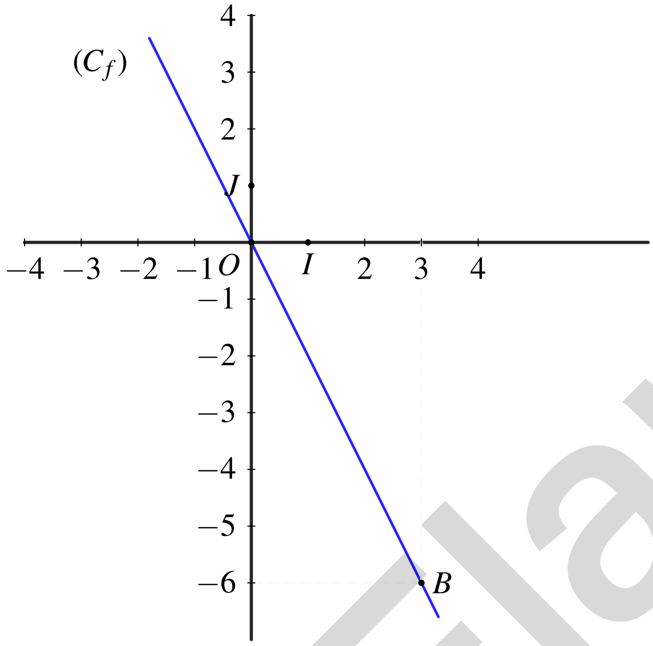
Application

Soit f une fonction linéaire définie par $f(x) = -2x$

1. Est-ce-que les points Ạ−15 et Ḅ3−6 appartiennent à (C_f)
2. Tracer (C_f)

Solution

1. ★ On a $f(-1) = -2 \times (-1) = 2 \neq 5$, donc $A \notin (C_f)$
   ★ On a $f(3) = -2 \times 3 = -6$, donc $B \in (C_f)$
2. Traçage de (C_f)
   f est une fonction linéaire et $B \in (C_f)$, donc (C_f) est une droite qui passe par les points Ọ00 et Ḅ3−6



II Fonction affine

1 Définition

Définition

Soient a et b deux nombres réels donnés
Toute relation qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel $ax+b$ s'appelle fonction affine de coefficient a et on écrit $f(x) = ax+b$
Le nombre $ax+b$ s'appelle l'image de x par la fonction f

2 Exemples

• Exemple

Soient f, g et h des fonctions affines définies par : $f(x) = x-3$, $g(x) = 5$ et $h(x) = -\frac{3}{2}x+1$

1. Déterminer le coefficient des fonctions f, g et h
2. Calculer : $f(0)$, $g(-1)$ et $h(\frac{1}{3})$
3. Calculer l'image de 2 par la fonction f
4. Calculer le nombre d'image 6 par la fonction h

Solution

1 f est une fonction affine de coefficient 1
g est une fonction affine de coefficient 0
h est une fonction affine de coefficient $-\frac{3}{2}x$

2 Calculons $f(0)$, $g(-1)$ et $h(\frac{1}{3})$
$f(0) = 0 - 3 = -3$
$g(-1) = 5$
$h(\frac{1}{3}) = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} + 1 = -\frac{3}{6} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

3 Calculons l'image de 2 par f
On a $f(2) = 2 - 3 = -1$
Donc l'image de 2 par la fonction f est -1

4 Calculons le nombre d'image 6 par h
Résolvons l'équation $h(x) = 6$
L'équation $h(x) = 6$ est respectivement équivalente à $-\frac{3}{2}x + 1 = 6$
C'est à dire $\frac{3}{2}x = -6 + 1 = -5$, donc $x = \frac{-5}{\frac{3}{2}} = -5 \times \frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$
Donc le nombre d'image 6 par la fonction h est $-\frac{10}{3}$

3 Propriété

Proposition

Coefficient d'une fonction affine Si f est une fonction affine et x et x' deux nombres réels tel que $x \neq x'$
Donc, le coefficient de la fonction f est $a = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$

• Exemple

On considère la fonction affine f tel que : $f(0) = 3$ et $f(1) = 5$
Déterminer l'expression de la fonction f

Solution

Déterminons l'expression de f
On a f est une fonction affine donc $f(x) = ax + b$ et son coefficient est $a = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{5 - 3}{1} = 2$

Donc $f(x) = 2x + b$
✯ **Déterminons** b
On a $f(0) = 3$, donc $2 \times 0 + b = 3$, donc $b = 3$
Alors $f(x) = 2x + 3$

4 Représentation graphique d'une fonction affine

Proposition

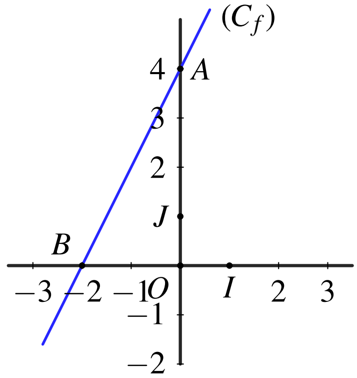
Soit $(O;I;J)$ un repère orthonormé
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui passe par les points Ą$xf(x)$ et Ḅ$x'f(x')$

• Exemple

On considère la fonction affine f définie par : $f(x) = 2x + 4$
Tracer, dans un repère orthonormé $(O;I;J)$, la représentation graphique (C_f) de la fonction f

Solution

Traçons la représentation graphique de la fonction f
Calculons $f(0)$ et $f(-2)$
On a $f(0) = 2 \times 0 + 4 = 0 + 4 = 4$
Et $f(-2) = 2 \times (-2) + 4 = -4 + 4 = 0$
Donc la représentation graphique de la fonction g est la droite qui passe par les points Ą04 et Ḅ-20



⚠

❶ Le point Ṃxy appartient à la représentation graphique d'une fonction affine f signifie que $f(x) = y$
❷ Les méthodes graphique pour déterminer les images et les nombres dont on connait leurs images restent valables pour une fonction affine
❸ Si $f(x)ax + b$ est une fonction affine , donc $f(0) = b$ et l'équation de la droite (Δ) la représentation graphique de la fonction f est : $(\Delta) : y = ax + b$
❹ Pour déterminer l'intersection de la représentation graphique d'une fonction affine f avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$ et le point d'intersection est donc : Ą$x0$
❺ Pour déterminer l'intersection de la représentation graphique d'une fonction affine f avec l'axe des ordonnées, on calcul $f(0)$ et le point d'intersection est donc : Ḅ$0f(0)$
❻ La fonction $f(x) = a$ est une fonction affine de coefficient 0 (ou fonction constante),

et sa représentation graphique est la droite passante par le point A0a et parallèle à l'axe des abscisses

Application

Soient f et g deux fonctions tel que : $f(x) = ax$ et $g(x) = 2x + b$

1. Déterminer a et b tel que $f(-1) = 3$ et $g(0) = 5$
2. Calculer $f(2)$ et $g(-1)$
3. Déterminer le nombre d'image -4 par la fonction f
4. Déterminer le nombre d'image 7 par la fonction g
5. Tracer (D) et (Δ) les représentations graphiques des fonctions f et g respectivement dans un repère orthonormé (O ;I ;J)
6. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de (D) et (Δ) graphiquement et algébriquement

Solution

1. Déterminons a et b

   ✸ f est une fonction linéaire , donc son coefficient est $a = \frac{f(-1)}{-1} = \frac{3}{-1} = -3$
   Alors $f(x) = -3x$
   ✸ On a $g(0) = 5$, donc $2 \times 0 + b = 5$, d'ou $b = 5$
   Alors $g(x) = 2x + 5$

2. Calculons $f(2)$ et $g(-1)$
   ✸ $f(2) = -3 \times 2 = -6$
   ✸ $g(-1) = 2 \times (-1) + 5 = -2 + 5 = 3$

3. Déterminons le nombre d'image -4 par f
   L'équation $f(x) = -4$ est respectivement équivalent à $-3x = -4$, c'est à dire $x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$
   Alors le nombre d'image -4 par f est $\frac{4}{3}$

4. Déterminons le nombre d'image 7 par g
   L'équation $g(x) = 7$ est respectivement équivalent à $2x + 5 = 7$, 'est à dire $2x = 7 - 5 = 2$, donc $x = \frac{2}{2} = 1$
   Alors le nombre d'image 7 par g est 1

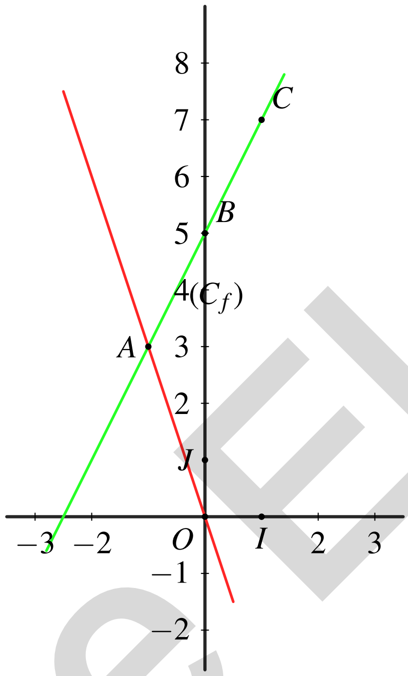
5 Traçons (D) et (Δ)

x	0	-1
$f(x)$	0	3

(D) passe par les points O̧00 et A̧−13

x	0	1
$g(x)$	5	7

(Δ) passe par les points B̧05 et 17



6 Déterminons les coordonnées de H
✷ Graphiquement :
Les deux droites (D) et (Δ) se coupent au point Ḩ−13
✷ Algébriquement :
On résout l'équation $f(x) = g(x)$
L'équation $f(x) = g(x)$ est respectivement équivalent à $-3x = 2x+5$, c'est à dire $-3x - 2x = 5$
Donc $-5x = 5$, donc $x = \dfrac{5}{-5} = -1$
Et on a $f(-1) = 3$
Alors Ḩ−13 est le point d'intersection des droites (D) et (Δ)