Chapitre Produit scalaire dans le plan

Historique

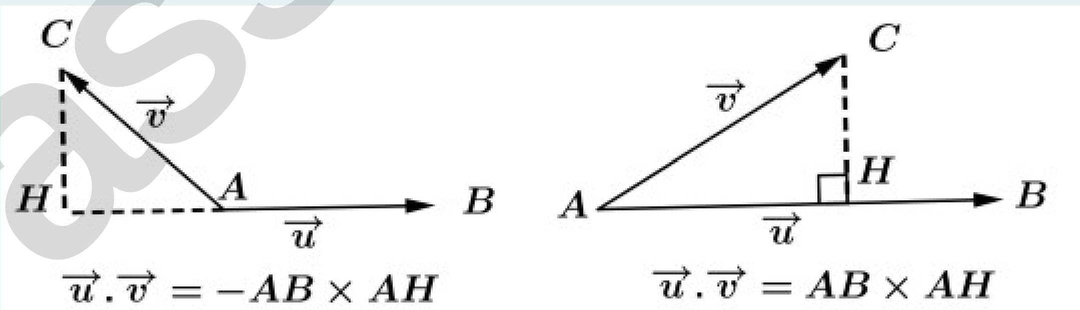
Le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions et chez Grassmann . Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant. Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent seulement à l'aide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de **produit intérieur** ou **produit scalaire** .
La notation du produit scalaire à l'aide d'un point ou d'une croix provient de Josiah Willard Gibbs, dans les années 1880.
Pourtant, l'expression produit scalaire apparaît pour la première fois4 dans une publication scientifique dans un livre de William Kingdon Clifford daté de 1878. Cette paternité est néanmoins remise en cause par M. J. Crowe, pour qui le travail de Clifford est une transition entre l'algèbre des quaternions décrite par Hamilton et la formalisation des espaces vectoriels.

I Produit scalaire de deux vecteur

Définition

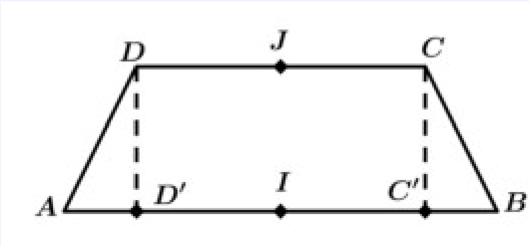
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A, B et C trois points du plan tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .
Le **produit scalaire** des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le **Nombre réel** défini comme suit :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens opposés, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$.



Application

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle tel que : $AB = 6$ et $CD = 5$
soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. (voir la figure).



Calculer les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC'}$
- $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{ID}$

Propriété

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.
- Soient A, B et C trois points du plan, on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

Application

1 . Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans les deux cas suivants :
- $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$,et $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$
- $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \frac{2}{\sqrt{2}}$,et $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) \equiv \frac{5\pi}{4}\,[2\pi]$

2 . Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 4$. Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$.

3 . Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

4 . Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Déterminer les mesures possibles de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ sachant que : $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$,et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\sqrt{6}$.

II Propriétés du produit scalaire :

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel. On a :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ($\vec{u}^2$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$)

Application

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, tels que : $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$,et $\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}^2$, $\overrightarrow{v}^2$ et $(2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot\left(\overrightarrow{u}+\frac{3}{2}\overrightarrow{v}\right)$

Propriété

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, On a :

- $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$

Application

1 . Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, tels que : $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$,et $\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
Calculer : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et $(2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v})^2$

2 . Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, tels que : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$,et $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| = 7$.
Calculer : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|$

Propriété

Soient A, B et C trois points du plan, on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

Exemples

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)
\end{aligned}$$

Application

1 . Soient A, B et C trois points du plan tels que : $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$ et $BC = \sqrt{2}$
Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$

2 . Soit ABC un triangle rectangle en A . Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Propriété

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux**, et on écrit $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Application

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs orthogonaux du plan, tels que : $\|\overrightarrow{u}\| = 4$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 5$.
Déterminer le réel m sachant que : $(m\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 13$

III Théorème d'Al-Kashi

1 Théorème d'Al-Kashi

- Soit ABC un triangle. On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$
- Donc : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- Par conséquent : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

T Théorème

Soit ABC un triangle. On a :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(\widehat{A}\right)$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos\left(\widehat{C}\right)$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\left(\widehat{B}\right)$

Application

1 . ABC est un triangle tel que : $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{4}$. Calculer BC .

2 . MNP est un triangle tel que : $MN = \sqrt{3}$, $NP = 2$ et $\widehat{N} = \frac{5\pi}{6}$. Calculer MP

IV Théorème de la médiane

T Théorème

Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$. On a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

Exemples

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{0}+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 \\ &= 2MI^2+\frac{1}{2}AB^2 \end{aligned}$$

Application

ABM un triangle et I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AM]$ et $[BM]$. Sachant que : $AB=4$, $AM=3$ et $BM=4$, Calculer les distances MI , AK et BJ.

V Relations métriques dans un triangle rectangle

Propriété

Soit ABC triangle et H le projeté orthogonal de A sur (AB) et I le milieu $[BC]$.
ABC est rectangle en A, si et seulement si l'une des relations suivantes est vérifiée :

- $BC^2=AB^2+AC^2$.
- $AB^2=BH\times BC$.
- $AH^2=HB\times HC$.
- $AI=\frac{1}{2}BC$.

Application

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC) et $AB=3$, $AC=4$: Calculer les longueurs BC, HC, HB, et AH .