

Système de deux équations à deux inconnues



Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

1 Définition



Définition

Soient a, a', b, b', c et c' des nombres réels

On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues, toute écriture de

la forme :
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
 d'inconnues x et y

2 Exemples

• Exemple

On considère les systèmes suivants : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y - \frac{2}{3} = 0 \\ -3x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$



Résolution des systèmes

1 Définition



Définition

Résoudre un système, c'est trouver tous les couples (x, y) (s'ils existent) pour lesquels les deux équations sont vérifiées simultanément



Remarque

❖ Pour la résolution des systèmes, on peut parler de deux types de résolution différents :

- ⇒ La résolution algébrique, qui peut se faire de deux façons :
 - ① Méthode par substitution
 - ② Méthode par combinaisons linéaires
- ⇒ La résolution graphique

2 La résolution algébrique d'un système

a Méthode par substitution

Définition

Cette méthode consiste à exprimer, l'une des inconnues en fonction de l'autre, dans l'une des équations, et le remplacer dans l'autre équation, pour arriver une équation à une inconnue

Remarque

On utilise, de préférence, la méthode par substitution, lorsque l'une des deux inconnues a pour coefficient 1 ou -1

• Exemple

Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$$

Solution

$$\text{Résolvons } \begin{cases} 2x + y = 11 & \textcircled{1} \\ x + 3y = 18 & \textcircled{2} \end{cases} \quad (S)$$

Dans l'équation $\textcircled{1}$, on écrit y en fonction de x

Donc, $y = 11 - 2x$ $\textcircled{3}$

On substitue y dans l'équation $\textcircled{2}$, on trouve $x + 3(11 - 2x) = 18$

Donc $x + 33 - 6x = 18$, c'est à dire $-5x = 18 - 33$ c'est à dire $-5x = -15$

Donc $x = \frac{-15}{-5}$, d'où $x = 3$

On remplace x par sa valeur 3 dans l'équation $\textcircled{3}$, on trouve : $y = 11 - 2 \times 3 = 11 - 6$

Donc $y = 5$

Alors, le couple $(3; 5)$ est la solution du système (S)

b Méthode par combinaison linéaire

Définition

Cette méthode consiste à multiplier chacune des équations du système par un nombre convenable pour trouver deux coefficients opposés pour la même inconnues, après on additionne les deux équations trouvées membre à membre pour arriver à une équation du premier degré à une inconnue

Remarque

On utilise, de préférence, la méthode de combinaison linéaire si on a deux coefficients opposés pour la même inconnue

Exemple

Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} -5x + 4y = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

Solution

Réolvons :
$$\begin{cases} -5x + 4y = -1 & \textcircled{1} \\ 3x - 2y = 1 & \textcircled{2} \end{cases} \quad (S)$$

► Etape ① Élimination de y

On multiplie les membres de l'équation ② par 2, donc
$$\begin{cases} -5x + 4y = -1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$$

On ajoute ces équations membre à membre, on trouve : $-5x + 4y + 6x - 4y = -1 + 2$
Donc $x = 1$

► Etape ② Élimination de x

On multiplie les membres de l'équation ① par 3 et les membres de l'équation ② par 5, on obtient ainsi le système suivant
$$\begin{cases} -15x + 12y = -3 \\ 15x - 10y = 5 \end{cases}$$

On ajoute ces équations membre à membre, on trouve : $-15x + 12y + 15x - 10y = -3 + 5$
Donc $2y = 2$, d'où $y = 1$

Alors, le couple $(1; 1)$ est la solution du système (S)

Technique

Dans l'étape ② (Élimination de x), au lieu d'éliminer x par une combinaison linéaire, on remplace juste dans l'une des équations

On a $x = 1$

On remplace dans l'équation ② (par exemple) : $3 \times 1 - 2y = 1$

Donc $3 - 2y = 1$, c'est à dire $-2y = 1 - 3 = -2$

D'où $y = \frac{-2}{-2} = 1$

On trouve donc le même couple $(1; 1)$



⇒ On doit respecter la méthode demandé par l'exercice

3 La résolution graphique

a Définition

Définition

Cette méthode consiste à lier chaque équation du système à une droite, et de déterminer, dans un repère orthonormé, le couple de coordonnées de leur point d'intersection (s'ils se coupent), alors ce couple est la solution du système

• Exemple

Résoudre les systèmes suivants :

$$1 \quad \begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \quad (S_1)$$

$$2 \quad \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \quad (S_2)$$

$$3 \quad \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 6x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad (S_3)$$

Solution

$$1 \quad \text{Résolvons le système } \begin{cases} 4x - y - 2 = 0 & \textcircled{1} \\ 2x - y + 2 = 0 & \textcircled{2} \end{cases} \quad (S_1)$$

➡ **Pas ① : Trouver les équations réduites**

On a $4x - y - 2 = 0$ donc $y = 4x - 2$

Et $2x - y + 2 = 0$ donc $y = 2x + 2$

On considère les deux droites (D_1) et (D_2) tel que : $\begin{cases} (D_1) \ y = 4x - 2 \\ (D_2) \ y = 2x + 2 \end{cases}$

On remarque que les deux droites n'ont pas la même pente, donc elles sont sécantes

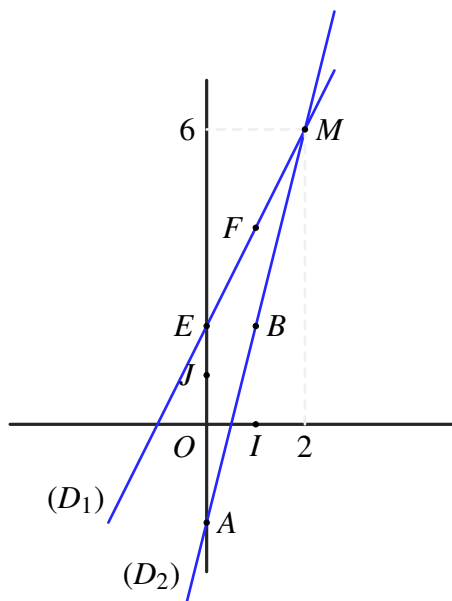
➡ **Pas ② : Représentation des droites (D_1) et (D_2)**

x	0	1
y	2	4
$M(x;y)$	$E(0;2)$	$F(1;4)$

(D_1)

x	0	1
y	-2	2
$M(x;y)$	$A(0;-2)$	$B(1;2)$

(D_2)



On remarque que les deux droites (D_1) et (D_2) se coupent au point M26

Alors, le couple $(2, 6)$ est la solution du système (S_1)

2 Résolvons le système
$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 & \textcircled{1} \\ 4x + 2y = 2 & \textcircled{2} \end{cases} \quad (S_2)$$

On considère les droites (D) et (Δ) tel que : $(D) : 2x + y - 1 = 0$ et $(\Delta) : 4x + 2y = 2$
Cherchons les équations réduites des droites (D) et (Δ)

On a
$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} y = -2x + 1 \\ 2y = -4x + 2 \end{cases}$$

Donc
$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = \frac{-4x + 2}{2} \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

Alors
$$\begin{cases} (D) : y = -2x + 1 \\ (\Delta) : y = -2x + 1 \end{cases}$$

On remarque que les droites (D) et (Δ) ont la même équation réduite, donc (D) et (Δ) sont deux droites confondues

Alors, le système (S_2) admet une infinité de solutions

3 Résolvons le système
$$\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 & \textcircled{1} \\ 6x + 2y + 1 = 0 & \textcircled{2} \end{cases} \quad (S_3)$$

On considère les droites (D) et (Δ) tel que : $(D) : 3x + y - 5 = 0$ et $(\Delta) : 6x + 2y + 1 = 0$
Cherchons les équations réduites des droites (D) et (Δ)

On a
$$\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 6x + 2y + 1 = 0 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} y = -3x + 5 \\ 2y = -6x - 1 \end{cases}$$

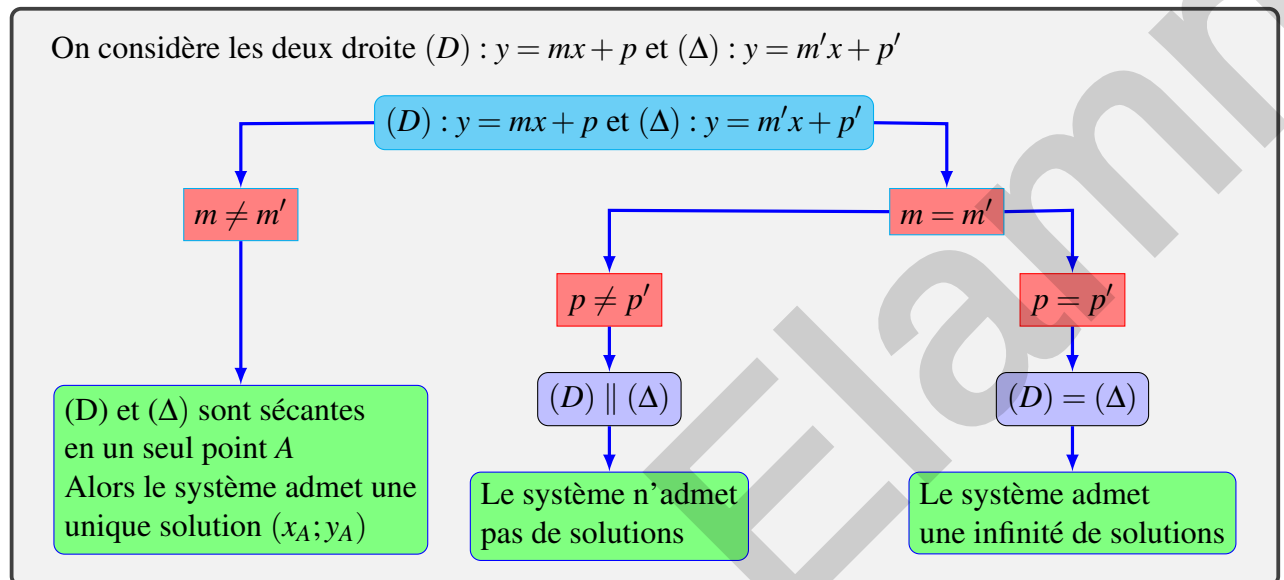
Donc
$$\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = \frac{-6x - 1}{2} \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = -3x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Alors
$$\begin{cases} (D) : y = -3x + 5 \\ (\Delta) : y = -3x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

On remarque que les deux droites (D) et (Δ) ont la même pente (mais pas le même ordonnée à l'origine)

Donc (D) et (Δ) sont strictement parallèles
Alors le système (S_3) n'admet pas de solutions

b Propriété récapitulative



III Systèmes et problèmes

Règle

La résolution d'un problème déroule en quatre étapes

- ❶ **Choix des inconnues**, trouvées à la question
- ❷ **Mise en système** : Transformation des données en équations
- ❸ **Résolution du système** : Algèbre
- ❹ **Retour au problème** : Vérification de la solution et réponse aux questions

Exemple

Une usine fabrique deux sortes d'objets A et B

L'objet A nécessite $2Kg$ d'acier et $3h$ (heures) de fabrication

L'objet B nécessite $4Kg$ d'acier et $2h$ de fabrication

Combien d'objets de chaque sorte a-t-on fabriqué en $68h$ de travail en utilisant $80Kg$ d'acier ?

Solution

- ❶ **Choix des inconnues**

Soient x le nombre d'objet A fabriqué et y le nombre d'objet B fabriqué

- ❷ **Mise en système**

Puisque l'objet A nécessite $2Kg$ d'acier et l'objet B nécessite $4Kg$ d'acier, alors l'ensemble d'objets fabriqués en utilisant $80Kg$ d'aciers est : $2x + 4y = 80$

Puisque l'objet A nécessite $3h$ de fabrication et l'objet B nécessite $2h$ de fabrication, alors l'ensemble d'objets fabriqués pendant $68h$ de fabrication est : $3x + 2y = 68$

D'où le système est :
$$\begin{cases} 2x + 4y = 80 \\ 3x + 2y = 68 \end{cases}$$

③ Résolution du système

On a
$$\begin{cases} 2x + 4y = 80 & \textcircled{1} \\ 3x + 2y = 68 & \textcircled{2} \end{cases} \quad (S)$$

On multiplie l'équation $\textcircled{2}$ par -2

Donc
$$\begin{cases} 2x + 4y = 80 & \textcircled{1} \\ -6x - 4y = -136 & \textcircled{2} \end{cases} \quad (S)$$

On ajoute les deux équations membre à membre, $2x + 4y - 6x - 4y = 80 - 136$

Donc $-4x = -56$ c'est à dire $x = \frac{-56}{-4} = 14$

On remplace dans l'équation $\textcircled{1}$, donc $2 \times 14 + 4y = 80$, c'est à dire $4y = 80 - 28 = 52$

Donc $y = \frac{52}{4} = 13$

D'où le système admet pour unique solution le couple $(14, 13)$

④ Retour au problème

On a
$$\begin{cases} 2 \times 14 + 4 \times 13 = 28 + 52 = 80 \\ 3 \times 14 + 2 \times 13 = 42 + 26 = 68 \end{cases}$$

Alors le nombre d'objets A fabriqué est 14

Et le nombre d'objets B fabriqué est 13