Chapitre

Produit scalaire dans l'espace

Historique

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand Hermann Grassmann $(1809-1877)$, ci-contre. Il fut baptisé produit scalaire par William Hamilton $(1805-1865)$ en 1853.

I Produit scalaire dans l'espace

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $(\mathscr{E})$. A, B et C trois points de $(\mathscr{E})$ tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace $(\mathscr{E})$ qu'on note $\vec{u}.\vec{v}$ est égal á $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC)

Remarque

- $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$ est le carré scalaire de $\vec{u}$ est toujours positif.
- $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=\overrightarrow{AB}$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ on note : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=AB$.
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times cos\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times cos\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire $\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

Propriété

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathscr{E}$; $\alpha\in\mathbb{R}$ on a :

1. $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$
2. Symétrie du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.
3. Positivité du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2\geq 0$.
4. Non dégènère : $\vec{u}.\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=0$.
5. Linéarité du produit scalaire :

$$\begin{cases}\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w},\\(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u}=\vec{v}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{u},\\\vec{u}.(\alpha\vec{v})=(\alpha\vec{u}).\vec{v}=\alpha(\vec{u}.\vec{v}).\end{cases}$$

6. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ et $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$.

Application

Soit $ABCD$ un tétraèdre de faces régulières (chaque face est un triangle équilatéral de coté a pour longueur. Montrer que deux cotés opposés sont orthogonaux (exemple le coté opposé de$[AB]$ est le coté $[DC]$.

II Base et repère orthonormé :

Rappel :

$\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$ et $\vec{w}(x",y",z")$ trois vecteurs de lespace $\mathscr{E}$ rapporté a une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre est le nombre :

$$\begin{aligned} det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) &= \begin{vmatrix} x & x' & x" \\ y & y' & y" \\ z & z' & z" \end{vmatrix} \\ &= x\begin{vmatrix} y' & y" \\ z' & z" \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x" \\ z' & z" \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x" \\ y' & y" \end{vmatrix} \\ &= (xy'z" - xz'y") - (yx'z" - yz'x") + (zx'y" - zy'x") \end{aligned}$$

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.

• Exemple

$\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(2,0,1)$ et $\vec{w}(1,0,3)$ on a :

$$\begin{aligned} det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1\times 0 - 2\times(-7) + 3\times 0 = 14 \neq 0 \end{aligned}$$

D'où $\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(2,0,1)$ et $\vec{w}(1,0,3)$ ne sont pas coplanaires.

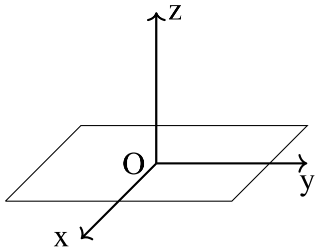
Conséquence

- $\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(2,0,1)$ et $\vec{w}(1,0,3)$ ne sont pas coplanaires donc le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace $(\mathscr{E})$.
- On prend un point O de l'espace $\mathscr{E}$ le quadruplet$(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est un repère de lespace $(\mathscr{E})$.

Définition

- $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de lespace $(\mathscr{E})$ équivaut à $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.

- ► Prenons un point O de lespace $(\mathscr{E})$ le quadruplé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est appelé repère de $(\mathscr{E})$.
- ► Si $\vec{k}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{i}=0$ et $\|\vec{j}\|=\|\vec{i}\|=\|\vec{k}\|=1$ alors :
- ♦ la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée .
- ♦ le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé.



III Expression analytique de $\vec{u}.\vec{v}$

- Dans tout le reste de ce chapitre ; on considère l'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
- On prend $\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$, $M(x,y,z)$, $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ et $C(x_C,y_C,z_C)$.

Activité

1. On utilise la linéarité du produit scalaire donner $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de x,y,z,x',y' et z'.
2. Ecrire $\|\vec{u}\|$ en fonction de x,y et z.
3. Donner la distance $AB=\|\overrightarrow{AB}\|$ en fonction de x_A,y_A,z_A,x_B,y_B et z_B.

Propriété

- ► Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$
- ► La norme du vecteur $\vec{u}$ est :$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- ► La distance AB est : $AB=\sqrt{(x_B-x_B)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Application

$\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(5,7,4)$ deux vecteurs et $A(1,5,7)$ et $B(2,9,8)$ deux points de lespace $(\mathscr{E})$. Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et AB.

IV Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que : $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = k$ avec $\vec{u}(a,b,c);(\vec{u} \neq 0)$

Propriété

Soient $A(x,y,z)$ un point, $\vec{u}(a,b,c)$ un vecteur non nul de lespace $(\mathscr{E})$ et $k \in \mathbb{R}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = k$ est un plan $(\mathscr{P})$ d'équation de la forme : $ax+by+cz+d=0$.

Application

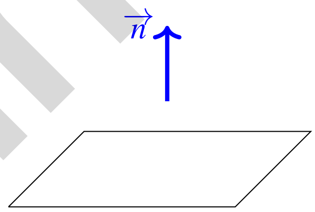
Soient $A(1,1,1)$ et $\vec{u}(0,1,0)$. Déterminer $(\mathscr{P})$ ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0$

V Plan déterminer par un point et un vecteur normal

1 Vecteur normal à un plan

Définition

Tout vecteur $\vec{n}$ non nul sa direction est perpendiculaire au plan $(\mathscr{P})$ s'appelle vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$.



Remarque

- $\vec{n}$ est normale au plan $\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v})$ alors $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$.
- Si $\vec{n}$ est normale au plan $(\mathscr{P})$ et passe par A alors le plan est $(\mathscr{P})$ noté par $\mathscr{P}(A,\vec{n})$.

2 Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $ax+by+cz+d=0$

Propriété

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est le plan et le vecteur non nul $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal à ce plan.

Application

Déterminer l'ensemble des points $M(x,y,z$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie $x+2y-z+4=0$

3 Ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

Propriété

Soient $\vec{n}(a,b,c)\neq\vec{0}$ un vecteur non nul et $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace $(\mathscr{E})$. L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifie : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est le plan $(\mathscr{P})$ qui passe par A et le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à ce plan (c.à.d. $\mathscr{P}(A,\vec{n})$). Le plan $(\mathscr{P})$ a pour équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$.

Application

Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par le point $A(2,1,3)$ et $\vec{n}(1,1,2)$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Propriété

tout plan $\mathscr{P}(A,\vec{n}(a,b,c))$ a pour équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ la réciproque avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Application

Donner l'équation du plan $\mathscr{P}(0,\vec{i},\vec{j})$ qui passe par le point $A(0,0,m)$ avec $m\in\mathbb{R}$

VI Distance d'un point à un plan

Définition

Soient $(\mathscr{P})$ un plan, A un point de l'espace $(\mathscr{E})$ et H est la projection orthogonale de A sur le plan $(\mathscr{P})$ la distance du point A au plan $(\mathscr{P})$ est AH et on note $AH=d(A,(\mathscr{P}))$.

Propriété

Soient $(\mathscr{P})$ un plan et $A(x_B,y_A,z_A)$ est un point de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $(\mathscr{P})$ a pour équation $(\mathscr{P}):ax+by+cz+d=0$. La distance du point A au plan $(\mathscr{P})$ est

$$d(A,(\mathscr{P}))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Application

On considère le plan d'équation $(\mathscr{P}):x+3y+5z+1=0$.

1. Est ce que : $A(1,1,1)\in(P)$?
2. Donner la distance $d(A,(\mathscr{P}))$

VII Parallélisme et orthogonalité des droites et des plans

1 Parallélisme et orthogonalité de deux plans

Propriété

Soient : $(\mathscr{P}) : ax+by+cz+d=0$ et $(\mathscr{P}') : a'x+b'y+c'z+d'=0$ deux plans dans l'espace $(\mathscr{E})$ et $\vec{n}(a,b,c)$ et $\vec{n'}(a',b',c')$ deux vecteurs normaux respectivement a $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.

1. Les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont parallèles si, et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.
2. Les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants si, et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont non colinéaires.
3. Les plans sont $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ perpendiculaires si, et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.

2 Parallélisme et orthogonalité d'une droite et un plan

Propriété

Soient : $(\mathscr{P}) : ax+by+cz+d=0$ un plan, $\mathscr{D}(A,\vec{u})$ une droite de l'espace $(\mathscr{E})$ et $\vec{n}(a,b,c)$ vecteur normales de $(\mathscr{P})$.

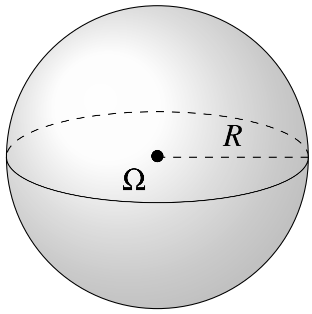
1. $(\mathscr{D}) \| (\mathscr{P}) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{u}=0$
2. $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}) \Leftrightarrow \vec{n} et \vec{u} sont colinaires$

VIII Étude analytique du sphère

1 sphère

Définition

Soient Ω un point donné de l'espace $(\mathscr{E})$ et $R>0$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que $\Omega M = R$ s'appelle le sphère de centre Ω et de rayon R on la note $(\mathscr{S})$ ou $\mathscr{S}(\Omega,R)$.



2 Equation cartésienne d'une sphère

Propriété

Soient $\Omega(a,b,c)$ un point dans l'espace et $R \geq 0$, la sphère $\mathscr{S}(\Omega,R)$ à une équation cartésienne de la forme :$(x-a)^2+y-b)^2+z-c)^2=R^2$.

Application

Donner l'équation cartésienne du sphére $\mathscr{S}(O(0,0,0),1)$.

3 Equation cartésienne du sphère déterminé par un diamètre $[AB]$

Définition

Soit ω le milieu de $[AB]$, on dit alors $[AB]$ est un diamètre du sphère $(\mathscr{S})$. Cette sphère sera notée aussi par $\mathscr{S}_{[AB]}$.

4 L'ensemble des $M(x,y,z)$ de l'espace $\mathscr{E}$ tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

Propriété

L'ensemble (E) des $M(x,y,z)$ de l'espace $\mathscr{E}$ tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ avec a,b,c et d de $\mathbb{R}$, on pose $r=a^2+b^2+c^2-4d$ est :

- $(E)=\emptyset$ si $r<0$
- $(E)=\left\{\Omega(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2})\right\}$ si $r=0$
- Le sphère $(E)=\mathscr{S}\left(\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right),R=\frac{\sqrt{r}}{2}\right)$ si $r>0$

5 Positions relatives d'une sphère et un plan

a Intersection d'un plan $(\mathscr{P})$ et une sphère $(\mathscr{S})$

Proposition

Soient $(\mathscr{S})$ une sphère de centre Ω et de rayon R, $(\mathscr{P})$ un plan de l'espace, nommons H le projeté orthogonal de Ω sur le plan $(\mathscr{P})$ et $d=\Omega H$, la distance du point Ω au plan $(\mathscr{P})$.

- Si $d>R$ alors le plan $(\mathscr{P})$ et la sphère $(\mathscr{S})$ n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.
- Si $d=R$ alors le plan $(\mathscr{P})$ et la sphère $(\mathscr{S})$ ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que le plan $(\mathscr{P})$ est tangent en H à $(\mathscr{S})$
- Si $d<R$ alors l'ensemble des points commun au plan $(\mathscr{P})$ et la sphère $(\mathscr{S})$ est le cercle du plan $(\mathscr{P})$ de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d^2}$ (Théorème de Pythagore), dans ce cas on dit le

plan $(\mathscr{P})$ est sécant à $(\mathscr{S})$.

b Équation du plan tangent à une sphère

Proposition

par un point A quelconque d'une sphère $(\mathscr{S})$ il existe un et un seul plan $(\mathscr{P})$ tangente au sphère $(\mathscr{S})$ au point A. l'équation de $(\mathscr{P})$ est : $M \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\omega} = 0$

6 Positions relatives d'une sphère et une droite

Proposition

Soient $(\mathscr{D})$ une droite de l'espace et $(\mathscr{S})$ une sphère de centre Ω et de rayon R, H le projeté orthogonal du point Ω sur la droite $(\mathscr{D})$. Notons $d = \omega H$:

- Si $d > R$ alors la droite $(\mathscr{D})$ et la sphère $(\mathscr{S})$ n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.
- Si $d = R$ alors la droite $(\mathscr{D})$ et la sphère $(\mathscr{S})$ ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que la droite $(\mathscr{D})$ est tangente en H à $(\mathscr{S})$
- Si $d < R$ alors la droite $(\mathscr{D})$ et la sphère $(\mathscr{S})$ en deux points en commun A et B symétriques par rapport au point H, dans ce cas on dit que la droite $(\mathscr{D})$ est sécante à $(\mathscr{S})(OA = OB = R)$.