Exercice TCS

Chapitre

Produit scalaire dans le plan

Série d'exercices

Exercice

$ABCD$ un trapèze isocèle, $AB = 6$ et $CD = 5$.
I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC'}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ e) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IJ}$ f) $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{ID}$

Exercice

1. ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 4$.
   Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.
2. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Déterminer les mesures possibles de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ sachant que : $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$, et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2\sqrt{6}$.

Exercice

ABC un triangle isocèle en A tels que $AB = 3$ et $BC = 3\sqrt{3}$.
Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. En déduire $A\widehat{C}B$ et $C\widehat{A}B$.

Exercice

Soient A, B et C trois points du plan tels que : $AB = 1, AC = \sqrt{3}$ et $BC = \sqrt{2}$.
Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Exercice

ABC un triangle tel que :

$AB = 1, AC = \sqrt{2}$ et $\cos(\hat{A}) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Considérons D un point du plan défini par : $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$.
   a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
   b. Conclure.

Exercice

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$ et $AD = 4$ et $CD = 6$, O le milieu de $[AB]$.

1. Calculer les distances BD et AC.
2. Montrer que pour tout point M du plan que $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 18$.
3. En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MB^2 = 24$.

Exercice

ABC un triangle rectangle en A , H le projeté orthogonal de A sur (BC) et $AB = 3$, $AC = 4$.

Calculer les longueurs BC, HC, HB et AH.

Exercice

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3$ et $AC = 1$ et $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{-1}{3}$.

1. Vérifier que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1$.
2. Calculer la distance BC.
3. I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$.
   Calculer AI , BJ et $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$.
4. Soit E un point du plan tel que : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}$.
   a. Écrire $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b Montrer que les droites (AB) et (IE) sont perpendiculaires.

Exercice

Calculer $\vec{U}\cdot\vec{V}$ dans les cas suivants :

- $\|\vec{U}\| = 2\sqrt{2}, \|\vec{V}\| = \sqrt{2}$, et $(\overline{\vec{U};\vec{V}}) \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$.
- $\|\vec{U}\| = 4, \|\vec{V}\| = 2$, et $(\overline{\vec{U};\vec{V}}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$.
- $\|\vec{U}\| = 1, \|\vec{V}\| = \sqrt{2}, et (\overline{\vec{U};\vec{V}}) \equiv \frac{500\pi}{4}[2\pi]$.

Déterminer les valeurs possibles de l'angle $(\vec{U};\vec{V})$ dans les cas suivants :

- $\|\vec{U}\| = 3, \|\vec{V}\| = 4$, et $\vec{U}\cdot\vec{V} = 6\sqrt{2}$.
- $\|\vec{U}\| = 1, \|\vec{V}\| = 2\sqrt{3}$, et $\vec{U}\cdot\vec{V} = -3$.

Exercice

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs du plan tels que $\|\vec{U}\| = 2, \|\vec{V}\| = 3$, et $(\overline{\vec{U};\vec{V}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Déterminer le réel m dans les cas suivants :

$(m\vec{U}-\vec{V})\cdot\vec{V} = 0$; $(2\vec{U}+3\vec{V})\cdot(\vec{U}-m\vec{V}) = -2$

$(m\vec{U}-\vec{V})^2 = 9$; $(2\vec{U}+m\vec{V})\cdot(3\vec{U}-\vec{V}) = 5$

Déterminer les réels a et b sachant que :

$$\begin{cases} (a\vec{U}+b\vec{V})\cdot\vec{U} = 0 \\ (a\vec{U}+b\vec{V})\cdot\vec{V} = 0 \end{cases}$$

Exercice

ABC un triangle. $AB = 6, AC = 5$ et $BC = 7$.

1. En utilisant le théorème d'**Al-Kashi** montrer que : $\cos(\widehat{A}) = \frac{1}{5}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis déduire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 30$.
3. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Calculer la distance BH.

Exercice

ABC est un triangle tel que :

$AB = 4, AC = 3$ et $\cos(\widehat{A}) = \frac{5}{6}$

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. Calculer la distance BC.
3. I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$. Montrer que :
   $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right)$
4. En déduire que : $(BI) \perp (CJ)$.

Exercice

ABC un triangle. $AB = 3, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$.
Soient I le milieu du segment $[AB]$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB).

1. Montrer que $AH = 2$, puis calculer AC.
2. Calculer BC puis déduire CI.
3. J un point du plan tel que : $8\overrightarrow{AJ} + k\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminer k pour que $\overrightarrow{BJ} \perp \overrightarrow{AC}$.

Exercice

ABC est un triangle $BC = 2, AC = \sqrt{3}$ et $\hat{C} = \frac{\pi}{6}$.

1. Calculer AB puis déterminer la mesure de $\hat{A}$.
2. On considère H le projeté orthogonal de A sur (BC). Montrer que : $AH^2 + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$.
3.
   a. Calculer les distances CH et BH.
   b. En déduire que : $3\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$.
   c. Montrer que pour tout point M du plan (P) on a : $3MB^2 + MC^2 = 4HM^2 + 3$.
4. Trouver l'ensemble du points M du plan (P) tels que : $3MB^2 + MC^2 = 6$.

Exercice

$ABCD$ un carré de coté 1 et de centre O et I le milieu du segment $[BC]$. On construit à l'intérieur du carré $ABCD$ le point E de telle sorte que le triangle BCE soit équilatéral.

1. Montrer que $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE} = -OI \times OE$.
2. En déduire $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE} = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$.
3. Montrer que : $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.
4. En déduire la valeur de : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.