Cours 1AC

Chapitre

Transformation dans le plan

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
1 Rappel : symétrie axiale, symétrie centrale et translation ; 2 L'homothétie ; 3 Propriété caractéristique de la translation et celle de lhomothétie, cas de la symétrie centrale ; 4 Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs ; 5 Distance et transformations précédentes ; 6 Images de certaines figures géométriques (segment, droite, demi-droite, cercle, angle).	1 Reconnaître les figures isométriques et les figures semblables à l'aide de la translation, de la symétrie axiale et l'homothétie. 2 Résoudre des problèmes géométriques à l'aide de la translation, de la symétrie axiale et l'homothétie.
Les Recommandations pédagogiques	**Les extensions**
1 On donnera un rappel de la symétrie axiale, la symétrie centrale et de la translation à partir d'activités et d'exercices, et on donnera les définitions vectorielle et affine de ces transformations ; 2 L'introduction de l'homothétie se fera, à partir d'exemples, de la même manière que les transformations précédentes ;	1 La logique ; 2 Les ensembles ; 3 Barycentre 4 Les applications ; 5 Groupe ; 6 Géométrie dans l'espace ; 7 Les nombres complexes

pace0.2cm

I SYMÉTRIE CENTRALE- SYMÉTRIE AXIALE - TRANSLATION

1 Rappels

Activité

Soit $ABCD$ un losange de centre O et I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

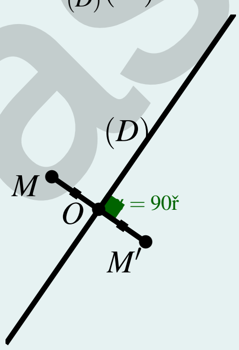
1. Construire une figure convenable.
2. a. Déterminer les symétriques des points A, B et O par rapport à O.
   b. En déduire le symétrique de la droite (AB) par rapport à O.
3. a. Déterminer les symétriques des points B, O et I par rapport à la droite (AC).
   b. En déduire le symétrique de la droite (OI) par rapport à la droite (AC).
4. a. Déterminer l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
5. a. Montrer que : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
   b. En déduire l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.
6. Déterminer l'image du segment $[BO]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

2 Définitions

a Symétrie axiale

Définition

Soit (D) une droite dans plan.
La symétrie axiale d'axe (D) est la transformation plane qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que la droite (D) soit la médiatrice du segment $[MM']$.
On dit que M' est l'image de M par La symétrie axiale d'axe (D) et on écrit : $M' = S_{(D)}(M)$.



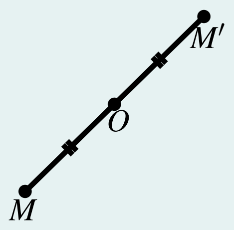
Remarque

Pour tout point M de (D), on a : $S_{(D)}(M) = M$.
On dit que tous les points de (D) sont invariants par la symétrie axiale d'axe (D).

b Symétrie centrale

Définition

Soit O un point du plan.
La symétrie centrale de centre O est la transformation plane qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que le point O soit le milieu du segment $[MM']$.
On dit que M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre O et on écrit : $M' = S_O(M)$.



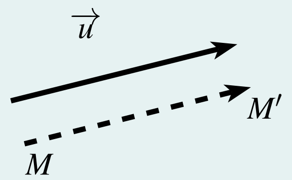
Remarque

L'unique point invariant par la symétrie centrale est son centre.

c Translation

Définition

La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation plane , à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
On dit que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ et on écrit : $t_{\vec{u}}(M) = M'$.



Remarque

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, la translation n'a aucun point invariant.
- Tous les points du plan sont invariants par la translation $t_{\vec{0}}$.

Application

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
$ABCD$ est un quadrilatère du plan tel que B est l'image de A par la transaltion de vecteur $\vec{u}$ et D est l'image de C par la translation de vecteur $2\vec{u}$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.
2. Soit I le molieu du segment $[CD]$. Montrer que $ABIC$ est un prallèlogramme.

II Homothétie

Activité

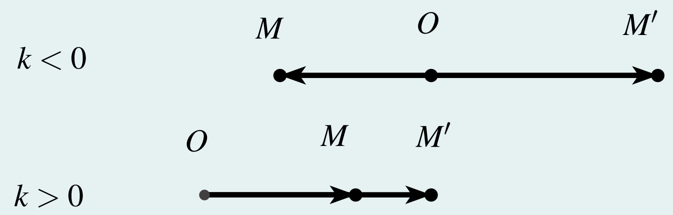
Soit OAB un triangle.

1. Construire les points M, N et P tels que : $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{ON} = -2\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.
   On a $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}$, on dit que M est limage de A par l'homothétie de cebtre O et de rapport $k = 2$.
2. Que représente le point N par rapport au point B et le point P par rapport au point A.
3. Construire le point Q l'image de B par l'homthétie de centre O et de rapport $k = -1$.

Définition

Soit O un point dans le plan et $k \in \mathbb{R}^*$.
L'homothétie de centre O et de rapport k est transformation du plan qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

On dit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k et on écrit : $M' = h(M)$.



Remarque

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k tel que $k \in \mathbb{R}^*$.

- Si $k = 1$, alors tous les points du plan sont invaraints par h.
- Si $k \neq 0$, alors le point O est le seul point invariant par h.
- Si $k = -1$, alors h est la symétrie centrale de centre O.
- Si $|k| > 1$, alors h est un grandissement de rapport $|k|$.
- Si $|k| < 1$, alors h est une réduction de rapport $|k|$.

Application

1. Exprimer vectoriellement la proposition suivante : B est l'image de C par l'homothétie h de centre A et de rapport $k = -\frac{3}{2}$.
2. Exprimer la relation vectorielle $\overrightarrow{JK} = \frac{5}{4}\overrightarrow{JL}$ par une homothétie.
3. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h' qui transforme A en B dans les cas suivants :
   - $2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.
   - $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

III Propriété caractéristique de : la translation - l'homothétie

1 Propriété caractéristique de la translation

Propriété

Soit T une transformation plane.
T est une translation si et seulement si pour tous M et N du plan, on a : $\overrightarrow{M'n'} = \overrightarrow{MN}$ tels que $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$.

Conséquence

Soit $t_{\overrightarrow{u}}$ une translation et M' et N' les images respectives de M et N par $t_{\overrightarrow{u}}$. on a :

- $M'N' = MN$. On dit que la translation conserve la distance.
- $(M'N')//(MN)$.

Application

Soit ABC un triangle et I un point du segment $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Construire B' et C' les images respectives de B et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.
2. Déterminer la nature du quadrilatère $BCC'B'$.

2 Propriété caractéristique de l'homothétie

Propriété

Soit T une transformation plane et $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.
T et une homothétie de rapport k si et seulment si pour tous points M et N du plan, on a : $\overrightarrow{M'n'} = k\overrightarrow{MN}$ tels que $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$.

Conséquence

Soit h une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et M' et N' les images respectives de M et N par h. on a :

- $M'N' = |k|MN$. On dit que l'homothétie ne conserve pas la distance.
- $(M'N')//(MN)$.

Application

$ABCD$ est un trapèze tel que : $(AB)//(CD)$ et $AB = \frac{1}{3}CD$.

1. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h qui transforme A en D et transforme B en C.

2 Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h' qui transforme A en C et transforme B en D.

IV Prpriétés

1 Conservation de coefficient de colinéarité de deux valeurs

Propriété

Soit T une transformation plane et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Soient A, B, C et D tels que $A \neq B$ des points du plan et A', B', C' et D' leurs images respectives par T.
Si $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{C'D'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$.
On dit que les transformations usuelles conservent le coéfficient de colinéarité de deux vecteurs.

Conséquence

Soit T une transformation plane.
- Si A, B et C sont trois points alignés, alors leurs images respectives A', B' et C' sont aussi alignés.
- Si I est le milieu du segment $[AB]$ et A', B' et I' les images respectives par T de A, B et I, alors I' est le milieu du segment $[A'B']$.
- Les transformations conservent le parallèlisme de deux droites.

Application

ABC est un triangle et I le milieu de $[BC]$.
On considère les points B' et C' du plan définis par : $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et soit J le milieu de $[B'C']$.
À l'aide d'une homothétie, montrer que les points A, I et J sont alignés.

2 Conservation de la mesure d'un angle géométrique

Propriété

Soit T une transformation plane.
SOient A, B et C des points du plan et A', B' et C' ses images respectives par T. on a : $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.
On dit que les transformation usuelles conservent la mesure d'un angle géométrique.

Conséquence

Les transformation usuelles conservent l'orthogonalité de deux droites.

Application

$OABC$ est un rectangle.
On considère t la translation de vecteur $2\overrightarrow{OC}$.

1. Soient O', A', B' et C' les images respectives de O, A, B et C par t.
Montrer que $O'A'B'C'$ est un rectangle.
2. On considère les points M et N du plan définis par : $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O'N} = \frac{2}{5}\overrightarrow{O'A'}$.
Montrer que : $CM = C'N$.

3 Conservation de l'intersection de deux droites

Propriété

Soit T une transformation plane.
Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en A et (D') et (Δ') leurs images respectives par T.alors :
Les droites (D') et (Δ') sont sécantes.
On dit que les transformations usuelles conservent l'intersection de deux droites.

Application

$ABCD$ est un parallèlogramme. I un point de $[BD]$ différent de B et D. J est l'intersection de (AI) et (BC) et K est l'intersection de (AI) et (CD).
On considère h l'homothétie de centre I et transforme B en D.

1. Faire une figure.
2. Déterminer $h(A)$ et $h(J)$.
3. Montrer que : $IA^2 = IJ \times IK$.

4 Image d'un cercle par une transformation plane

Propriété

- Soit T une transforamtion plane différente à une homothétie.
L'image du cercle $C(I,\mathbb{R})$ de centre I et de rayon R par T est le cercle cercle $C(I',\mathbb{R})$ tel que $T(I) = I'$.
- Soit h une homothétie de rapport k tel que $k \in \mathbb{R}^*$.
L'image du cercle $C(I,\mathbb{R})$ de centre I et de rayon R par h est le cercle cercle $C(I',|k|\mathbb{R})$ tel que $T(I) = I'$.

Application

$ABCD$ est un parallèlogramme et I et J sont deux points du plan tels que : $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$.

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Soit h l'homthétie de centre I et transforme B en C.
   a. Montrer que $h((AB)) = (CD)$.

b Montrer que le rapport de h est $k=-2$.

c Soit K l'image de J par h. Montrer que : $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CK}$.