Espaces Vectoriels Réels

Exercice

On rappelle que : $M_2(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau unitaire et que $M_2(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

I- On pose : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1 Montrer que : $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

2 On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a Montre que (I, J) est une base de $(E, +, \cdot)$, puis en déduire $\dim(E)$.

b Vérifier que : $J^2 = 2J$, puis montrer que E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

c Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un anneau unitaire non intègre.

d Montrer que la matrice $M(a,b)$ est inversible dans $(E, +, \cdot)$ si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq -2b$.

II- On considère l'ensemble : $F = \left\{ A(x) = I + \frac{3^x - 1}{2} J / x \in \mathbb{Z} \right\}$.

1 Montrer que F est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

2 Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on pose $f(x) = A(x)$.

a Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $F, \times$.

b En déduire la structure de $(F, \times)$ et préciser son élément neutre et l'inverse de la matrice $A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice

on rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1 Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

2 On pose $I = M(1,0)$ et $J = M(0,1)$.

Montrer que (I, J) est une base de $(E, +, \cdot)$, puis en déduire $\dim(E)$.

3 Montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$, $J^k = (-3)^k \cdot I$ puis en déduire les coordonnées, dans la base (I, J) , de la matrice : $S_n = I + J + J^2 + \dots + J^{2n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

4 a Montrer que $(\forall (a,b,x,y) \in \mathbb{R}^4)$, $M(a,b) \times M(x,y) = M(ax - 3ay, ay + bx)$

- b En déduire E que est stable dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.
- 5 a Montrer que $(1, i\sqrt{3})$ une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- b Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(a + ib\sqrt{3}) = M(a, b)$.
Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}, \times)$ vers $(E, \times)$, puis en déduire la structure de $(E^*, \times)$ où $E^* = E - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
- 6 Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.
- 7 On considère la matrice $A = \frac{1}{2} \cdot (I + J)$.
Déterminer tous les entiers naturels p tel que $A^p = I$.

Exercice

On considère l'ensemble $E = \{M(a, b) = aI + bA, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1 a Montrer que : $A^2 = A + 2I$
- b En déduire que la matrice A est inversible et donner son inverse A^{-1} .
- c Déterminer deux suites (u_n) et (v_n) telles que $A^n = u_n A + v_n I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2 On pose $\begin{cases} \alpha_n = 2u_n + v_n \\ \beta_n = u_n - v_n \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- a Déterminer la nature de chacune des suites (u_n) et (v_n) .
- b Donner le terme général de chacune des suites (α_n) et (β_n) .
- c En déduire A^n en fonction de n .
- 3 Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
- 4 a Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau intègre.
- b $(E, +, \times)$ est-il un corps ?

Exercice

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(M_2(\mathbb{R}); +, \times)$ est un anneau unitaire dont la zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} \ln(ab) & \ln(b^2) \\ \ln(\frac{1}{b}) & \ln(\frac{a}{b}) \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \right\}$

- 1
 - a Montrer que $(E; +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel.
 - b Vérifier que $I \in E$ et $J \in E$.
 - c Montrer que la famille $B = (I; J)$ est une base de $(E; +; \cdot)$.
- 2 Montrer que : $(\forall (M; N) \in M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})) (\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2); (\alpha \cdot M) \times (\beta \cdot N) = (\alpha\beta) \cdot (M \times N)$
- 3
 - a Vérifier que $J^2 = -I$; puis déduire que J est inversible et déterminer J^{-1} .
 - b Soient $M(\alpha; \beta)_B$ et $N(\alpha^2; \beta^2)_B$ deux éléments de E . $\left[(\alpha; \beta) \text{ et } (\alpha^2; \beta^2) \text{ sont les coordonnées de } M \text{ et } N \text{ dans la base } B \right]$
Montrer que $M \times N \in E$
- 4 On considère l'application φ définie de $\mathbb{C}$ dans E par : $(\forall (x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \varphi(x + iy) = M(x; y)_B$ où $(x; y)$ les coordonnées de la matrice M dans la base B .
 - a Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans E .
 - b Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}; \times)$ vers $(E; \times)$
 - c En déduire la structure de $(E^*; \times)$ où $E^* = E - \{M(0; 0)_B\}$.
- 5 Montrer que $(E; +; \times)$ est un corps commutatif.

Exercice

Soient x et y deux réels on pose $x T y = xy - 3(x + y) + 12$

- 1
 - a Démontrer que la loi T est commutative, associative et admet un élément neutre dans $\mathbb{R}$.
 - b Déterminer les éléments symétriques dans $(\mathbb{R}, T)$.
- 2 posons $G = \mathbb{R} - \{3\}$.
 - a Démontrer que G est une partie stable dans $(\mathbb{R}, T)$.
 - b Démontrer que (G, T) est un groupe commutatif.
- 3 On considère l'application φ de G dans $\mathbb{R}^*$ définie par $\varphi(x) = x - 3$
Démontrer que φ est un morphisme bijectif de (G, T) dans $(\mathbb{R}^*, \times)$

Exercice

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est anneau unitaire et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble E des matrices carrés de la forme $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

1 a Montrer que $(E, +)$ est groupe abélien.

b Montrer que $(E, +, \cdot)$ est espace vectoriel et déterminer sa dimension.

2 On pose : $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Montrer que $J^2 = -3I + 2J$, en déduire que J est inversible dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ et déterminer J^{-1}

3 Calculer $M(a, b) \times M(c, d)$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

4 On considère l'application f définie de E dans $\mathbb{C}$ par : $f(M(a, b)) = (a - b) + ib\sqrt{2}$

a Montrer que f est une application bijective et déterminer sa bijection réciproque.

b Montrer que f est un morphisme de $(E, \times)$ dans $(\mathbb{C}, \times)$

c En déduire la structure de $(E, +, \times)$

d Déterminer l'inverse de $M(a, b)$ où $(a, b) \neq (0, 0)$

e Résoudre dans E l'équation : $X^4 = M(1, 0)$ où $X^4 = X \times X \times X \times X$

Exercice

Partie A : On considère dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1 Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 4A - 3I$. (On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel).

2 Déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Partie B : On définit sur $\mathbb{R}$ la loi interne T définie par : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), xTy = x + y - 2016$

1 a Montrer que T est commutative et associative dans $\mathbb{R}$.

b Montrer que $(\mathbb{R}, T)$ est un groupe commutatif.

2 Soit $\perp$ la loi définie sur $\mathbb{R}$ par $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), x \perp y = x + y - \frac{1}{2016}xy$ et on considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2016(1 - x)$

a Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, \times)$ vers $(\mathbb{R}, \perp)$.

b Déduire que $(\mathbb{R}, T, \perp)$ est un corps commutatif.

Exercice

Soit E l'ensemble des matrices $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ tels que $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On pose $I = M(1, 0, 0)$, $A = M(0, 1, 0)$ et $B = M(0, 0, 1)$

On munit l'ensemble E de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un nombre réel.

- 1 Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- 2 Montrer que la famille (I, A, B) est une base de l'espace vectoriel E .
- 3
 - a Vérifier que : $A^2 = B$, $B^2 = A$ et $AB = BA = -I$.
 - b Montrer que : $(\forall (X, Y) \in E^2)$, $XY = YX$ et $XY \in E$
- 4 On considère la matrice $D = M(0, -1, 1)$.
 - a Montrer que la matrice D est inversible.
 - b Montrer que $D^2 - D - 2I = M(0, 0, 0)$
 - c En déduire D^{-1} , la matrice inverse de la matrice D et montrer que $D^{-1} \in E$.

Exercice

Soit E l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent sous forme : $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- 1 Déterminer deux matrices I et A de $M_3(\mathbb{R})$ indépendantes de a et b telles que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, M(a, b) = aI + bA$$
- 2 Montrer que $A^2 = A + 2I$ et déterminer son inverse dans E .
- 3 Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et déterminer sa dimension.
- 4 Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et non intègre.
- 5 On pose $A^0 = I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{n+1} = A^n \times A$.
Montrer par récurrence qu'il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$
- 6 Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $\begin{cases} U_{n+1} = 2\alpha_{n+1} + \beta_n \\ V_{n+1} = \alpha_{n+1} - \beta_{n+1} \end{cases}$
 - a Déterminer la nature de (U_n) et (V_n)
 - b Déterminer U_n , et V_n , en fonction de n
- 7 Déterminer les coordonnées de A^n en fonction de n dans la base $B = (I, A)$

Exercice

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire.

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1 Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
- 2
 - a Calculer A^2, A^3 et A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
(Discuter suivant le reste de la division de n par 3)
 - b Vérifier que A admet un inverse A^{-1} que l'on déterminera.
- 3 On considère l'ensemble $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = aI + bA + cA^2\}$
 - a Montrer que $(E, +)$ est un sous groupe de $(M_3(\mathbb{R}), +)$
 - b Vérifier que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.
 - c Déterminer une base de E .
- 4
 - a Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire commutatif.
 - b Calculer le déterminant de la matrice $-\sqrt[3]{3}.A + A^2$
 - c $(E, +, \times)$ est-il un corps? Justifier votre réponse.