Chapitre

Espaces Vectoriels Réels

I Espaces vectoriels réels

1 Espace vectoriel réel

a Loi de composition externe

D Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble.
on appelle loi de composition externe de $\mathbb{K}$ sur E, toute application de $\mathbb{K} \times E$ dans E.
Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on note en général $\alpha.x$ ou αx l'image de $(\alpha;x)$ par cette application.

Remarque

- Dans la définition précédente, on peut avoir $E = \mathbb{K}$; dans ce cas, on parle d'une loi de composition interne. Ainsi, toute loi de composition interne sur E peut être considérée comme une loi de composition externe sur E à coéfficient dans E.
- Au cours de ce chapite, on prendera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ comme corps de référence.

Exemple

1. L'ensemble $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coéfficient réels.
   Pour tout matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et pour tout réel α, on appelle produit de α par M, et on le note αM, la matrice $\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$. On a alors obtenu une loi de composition externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Cette loi s'appelle multiplication d'une matrice par un réel.
2. l'ensemble $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$: ensembles des n-uplets.
   Pour tout $X = (x_1;x_2;\ldots;x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout réel α, on appelle produit de X par α, et on le note αX, le n-uplets $\alpha X = (\alpha x_1;\alpha x_2;\ldots;\alpha x_n)$. On a alors obtenu une loi de composition externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$.
   Dans l'usage pratique, on prend souvent $\mathbb{R}^2$ (ensembles des couples) et $\mathbb{R}^3$ (ensembles des triplets).
3. l'ensemble $\mathscr{V}_2$: ensembles des vecteurs du plan.
   Pour tout vecteurs $\vec{u} \in \mathscr{V}_2$ et pour tout réel α, le produit de $\vec{u}$ par α, notée $\alpha\vec{u}$, est un élément de $\mathscr{V}_2$.On a alors obtenu une loi de composition externe de $\mathbb{R}$ sur $m\mathscr{V}_2$.Cette loi s'appelle multiplication d'un vecteur par un réel.
   La multiplication d'un vecteur de $\mathscr{V}_3$ par un réel est aussi une loi de composition externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{V}_3$.

4 L'ensemble $\mathscr{P}_n(n \in \mathbb{N}^*)$: ensemble des polynmmes de degré inférieur ou égale à n.
Pour tout polynmme $P \in \mathscr{P}_n$ et pour tout réel α, le produit de P par α, noté αP, est un élément de $\mathscr{P}_n$.
On a alors une loi de composition externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{P}_n$

b STRUCTURE D'ÉSPACE VECTORIEL RÉEL

Au secondaire, que ce soit en Mathématique ou en physique, nous avons utilisé les vecteurs du plan ou de l'espace : nous avons déja additionné deux vecteurs et éffectué le produit d'un vecteur par un réel. par des démonstrations élémentaires de géométrie, on peut constater certaines propriétés de ces deux opérations parmi lesquelles la commtativité et l'associativité de l'addition.
En se plançant dans une base $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$, on peut aussi :

- associer, à tout vecteur $\overrightarrow{u}$, le couple de ses coordonnées réels.
- traduire les opérations précedentes sur ces couples de coordonnées et ainsi obtenir, sur les éléments de $\mathbb{R}^2$, des opérations d'addition, et de multiplication par un réel.

Enfin, nous avons aussi vu dans les précédentes que : l'ensembles $\mathscr{F}(I\mathbb{R})$ des fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, dans lequel, l'addition de deux fonction et le produit d'une fonction par un réel ont les mêmes propriétés que les opérations précédentes.
La structure d'espace vectoriel, que nous allons introduire et qu'est très importante en Mathématique, pourrait apparaitre au prime abord; c'est pouquoi, pour l'assimiler plus facilement, il est bon, tout au long de ce qui va suivre, de garder à l'esprit les trois exemples précédents et ne pas hésiter à les manupiler.

D Définition

Un espace vectoriél réel (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est un triplet $(E;+;.)$ dans lequel E est un ensemble non vide muni :

1. D'une loi de composition interne, notée $+$, telle que $(E;+)$ est un groupe commutatif,
   - cette loi est l'addition de E.
   - son élément neutre est notée 0_E.
2. d'une loi de composition externe, application de $\mathbb{R}\times E$ dans E, appelée produit externe ou produit par un scalaire, notée $(\alpha;x)\mapsto \alpha.x$, et possédant les propriétés suivnates :
   - $\left(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\ (\forall x\in E)\ \ (\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x;$
   - $(\forall\alpha\in\mathbb{R})\left(\forall(x;y)\in E^2\right)\ \ \alpha.(x+y)=\alpha.x+\beta.yx;$
   - $\left(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\ (\forall x\in E)\ \ (\alpha\beta).x=\alpha.(\alpha.x);$
   - $(\forall x\in E)\ \ 1.x=x.$

On applelle alors vecteurs les éléments de E et scalaires les éléments de $\mathbb{R}$.

Exemple

1. Le corps $(\mathbb{R};+;\times)$ est espace vectoriel réel.
2. l'ensemble $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel si on le munit de son addition «+» et de la loi externe : $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ (\alpha;z) & \longmapsto & \alpha z\end{array}$

3 $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel reél.

4 $(\mathbb{R}^2;+;.)$ et $(\mathbb{R}^3;+;.)$ sont des espaces vectoriels réels.

5 $(\mathscr{V}_2;+;.)$ et $(\mathscr{V}_3;+;.)$ sont des espaces vectoriels réels.

6 L'ensemble $\mathscr{P}_n$ est un espace vectoriel réel si on le munit de son addition «+» et de la loi externe «.» : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathscr{F}(I;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(I;\mathbb{R}) \\ (\alpha;f) & \longmapsto & \alpha f \end{array}$

Notations :

- dans tout ce qui suit, on adoplte les conventions et les symboles suivants :
  - En l'abscene d'information sur la nature des éléments de E, un élément de E sera noté généralement $\overrightarrow{x}$.
  - On utilise l'écriture $\alpha\overrightarrow{x}$ au lieu de $\alpha.\overrightarrow{x}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{x}\in E$.
  - l'élément neutre de $(E;+)$ sera noté $\overrightarrow{0}$. v'est le vecteur nul de l'espace vectorile E.
  - Si $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et $x\in E$, on peut «diviser $\overrightarrow{x}$ par α» : cela revient à multiplier $\overrightarrow{x}$ par α^{-1}. Ainsi $\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{x}$ se note auussi $\frac{\overrightarrow{x}}{\alpha}$.
  - Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de E, le vecteur $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{v})$ s'écrit $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.
    le vecteur $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ s'appelle la différence des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans cet ordre.
- En pratique, les opérations «+» et «.» sont plus souvent utilisées sans ambiguité.
  En conséquence, l'espace vectoriel $(E,+;.)$ sera simplement noté E ,et on dira que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

En tenant compte de ces nouvelles notations, on aboutit à la définition suivante d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

D Définition

$(E;+;.)$ est un espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$espace vectoriel) lorsque :

1 $(E;+)$ est un groupe commutatif.

2 $(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall\overrightarrow{x}\in E)\quad(\alpha+\beta)\overrightarrow{x}=\alpha\overrightarrow{x}+\beta\overrightarrow{x}$.

3 $(\forall\alpha\in\mathbb{R})\ \left(\forall(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y})\in E^2\right)\quad\alpha(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})=\alpha\overrightarrow{x}+\alpha\overrightarrow{y}$

4 $(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall\overrightarrow{x}\in E)\quad(\alpha\beta)\overrightarrow{x}=\alpha(\beta\overrightarrow{x})$.

5 $(\forall\overrightarrow{x}\in E)\quad 1\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}$.

c RÈGLES DE CALCUL DANS UN ESPACE VECTORIEL RÉEL

Propriété

Soit $(E;;.)$ un espace vectoriel réel. Alors :

1 Tout vecteur de E est un élément régulier dans $(E;+)$.

2 Pour tout $\overrightarrow{x}\in E$: $0\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$.

3 Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $\alpha\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$.

4 Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et pour tout $\overrightarrow{x}\in E$: $\alpha\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}\iff\left(\alpha=0\ \text{ou}\ \overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}\right)$.

Propriété

Soit $(E;;.)$ un espace vectoriel réel. Alors :

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\overrightarrow{x} \in E$: $(-\alpha)\overrightarrow{x} = \alpha(-\overrightarrow{x}) = -(\alpha\overrightarrow{x})$.
2. Pour tout $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) \in E^2$, l'équation $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ admet une solution unique dans E. cette solution est : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$. ($\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ étant la différence des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ dans cette ordre.
3. Pour tout $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) \in E^2$: $\alpha(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = \alpha\overrightarrow{x} - \alpha\overrightarrow{y}$ et $(\alpha-\beta)\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{x} - \beta\overrightarrow{x}$.

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, on considère le smatrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A^2 - A - 2I_3 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $xI_3 = (3x+5)(A+3I_3)(A-4I_3)$.

Application

1. On définie sur $\mathbb{R}_+^*$ une loi de composition externe «.» à coéfficient réels par : $(\forall\alpha \in \mathbb{R})$ $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $\alpha.x = x^\alpha$ Montrer que $\mathbb{R}_+^*;\times;.)$ est un espace vectoriel réel.
2. On munit $\mathbb{R}^2$ de deux lois :
   - d'une loi interne : $(x;y)+(x';y') = (x+x';y+y')$
   - d'une loi externe : $(\forall\lambda \in \mathbb{R})$ $\lambda.(x;y) = (0;\lambda y)$

2 SOUS-ESPACE VECTORIEL

a DÉFINITION ET EXEMPLES

D Définition

Étant donné un espace vectoriel $(E;+;.)$, une partie F non vide de E est un sous-espace vectoriel de E lorsque : $(F;+;.)$ est un espace vectoriel réel.
ce qui revient à dire que :

1. $F \neq \emptyset$.
2. F est stable pour l'addition : $(\forall(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y}) \in F^2)$ $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F$.
3. F est stable pour le produit externe : $(\forall(\alpha;\overrightarrow{x}) \in \mathbb{R}\times F)$ $\alpha.\overrightarrow{x} \in F$.

Remarque

• Attention ! pour prouver que F est un sous-espace vectoriel de E ne pas oublier de vérifier que $F \neq \emptyset$ et $F \subset E$. Le plus fréquent pour montrer que $F \neq \emptyset$ et de justifier que $\overrightarrow{0} \in F$.
• E et $\{\overrightarrow{0}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E, $\{\overrightarrow{0}\}$ est appelé le sous espece vectoriel nul.
• Avec $\overrightarrow{u} \in E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, le sous-ensemble $\mathbb{R}\overrightarrow{u} = \{\alpha\overrightarrow{u} \;/\; \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé la droite vectorielle dérigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$.

Exemple

1. Dans $(\mathscr{V}_2;+;.)$, l'ensembles des vecteurs colénéaire à $\overrightarrow{u} = (2;1)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{V}_2;+;.)$. C'est la droite dérigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$.
2. L'nesemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et l'ensemble $i\mathbb{R}$ des imaginaires purs sont deux sous-espace vectoriels de l'espace vectoriel $(\mathbb{C};+;.)$.
3. On note $\mathscr{C}(I;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur un intervall I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, $\mathscr{C}(I;\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$. De même l'ensemble $\mathscr{D}(I;\mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$.
4. Dans l'ensemble $\mathscr{P}_n(n \in \mathbb{N}^*)$: ensemble des polynôme de degré inférieur ou égale à n est un sou-espace vectoriel$\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
5. Dans l'espace $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;.)$, l'ensemble F des solutions d'une équation différentielle linéaire de la forme $ay" + by' + cy = 0$ (avec $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ est un sou-espace vectoriel$\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. En effet, F n'est pas vide car il contient au moins la fonction nulle. Si f_1 et f_2 sont solutions de l'équation différentielle, il en est de même de la somme $f_1 + f_2$. Enfin, si f_1 est une solution et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la fonction αf_1 est une solution.
6. $F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z = 1\}$ n'est pas un sous espace-vectoriel du $(\mathbb{R}^3;+;.)$ car il ne contient pas le vecteur nul $\overrightarrow{0} = (0;0;0)$.
7. L'ensemble $G = \{(x;y) \in R^2 \;/\; xy = 0\}$ n'est pas sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^2;+;.)$ car elle n'est pas stable pour l'addition. Contre-exemple : $(1;0) \in G$ et $(0;1) \in G$, mais $(1;0) + (0;1)(1;1) \notin G$.

b CARACTÉRISATION D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

Propriété

Soit $(E;+;.)$ un espace vectoriel et F une partie de E. On a l'équivalence :

$$H \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \\ (\forall(\alpha;\beta) \in H^2) \ \ (\forall(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y}) \in F^2) \ \ \alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y} \in F \end{cases}$$

Remarque

• Dans un contexte de sous-espaces vectoriels, on étudie l'appartenance de $\overrightarrow{0}$ à F :

◊ $\overrightarrow{0} \in F$ donne $F \neq \emptyset$

◊ $\overrightarrow{0} \notin F$, alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

• Lorsqu'on souhaite montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, on aura le choix, ou bien d'utiliser la définition ou bien se ramener à la propriété précédente.

• Dans la partique, pour montrer qu'un sous ensemble F un espcae vectoriel réel, il peut être beaucoup plus facile de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel réel connu. C'est pour cette raison qu'il faut connaitre quelques espaces vectoriels reéls les plus familiers, à savoir : $(\mathbb{R};+;\times)$; $(\mathbb{C};+;.)$; $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;.)$; $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;.)$; $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;.)$;...

Exemple

1 On considère l'ensemble : $E = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y = 2x\right\}$. Montrer que $(E;+;.)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;.)$.

2 On considère l'ensemble : $F = \left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}\right\}$

Montrer que $(F;+;.)$ est un espace vectoriel réel.

Application

1 Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace $(\mathbb{R}^3;+;.)$:

$$E = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+2y+3z=0\right\} \;;\quad F = \left\{(x+y;2x-y;-3x+2y) \in \mathbb{R}^3 \;/\; (x;y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
$$G = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z=0 \text{ et } 2x-5y+z=0\right\} \;;\quad H = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x=3y=-z\right\}$$

2 Justifier pourquoi les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x-y+z=5\right\} \;;\quad E_2 = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z \leq 1\right\}$$
$$E_3 = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2-y^2=0\right\} \;;\quad E_4 = \left\{(x;1;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\right\}$$

3 FAMILLES LIBRES OU GÉNÉRATRICES-BASES

a COMBINAISON LINÉAIRES

D Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ des vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E;+;.)$.
On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$, ou encore combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$, tout vecteur de la forme :

$$\alpha_1 \overrightarrow{x_1} + \alpha_2 \overrightarrow{x_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_i} \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

Les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont appelés les coéfficients de la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_i}$.

Remarque

1. les combinaisons linéaires de la famille à un seul élément $(\overrightarrow{u})$ sont les vecteurs $\alpha \overrightarrow{u}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, celles de la famille à deux éléments $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ sont les vecteurs $\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.
2. Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;.)$, on considère les matrices :
$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de M_1 et M_2 car :
$3M_1 + 2M_2 = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = M$
3. dans l'espace vectoriel $(\mathscr{P}_3;+;.)$ des polynomes de degré inférieur ou égal à 3, on considère les polynôme P_0, P_1, P_2 et P_3 définie sur $\mathbb{R}$ par : $P_0(x) = 1$; $P_1(x) = x$; $P_2(x) = x^2$; $P_3(x) = x^3$.
Tout élément P de $\mathscr{P}_3$ peut s'écrire sous la forme : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, c'est-à-dire $P(x) = aP_3(x) + bP_2(x) + cP_1(x) + dP_0(x)$. Ainsi, tout élément de $\mathscr{P}_3$ est combinaison linéaire de la famille $(P_0; P_1; P_2; P_3)$.
4. Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{C};+;\times)$, tout nombre complexe z peut être consid"r" comme combinaison des nombres 1 et i car : $(\forall z \in \mathbb{C})(\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2) \ z = a + ib$.

Application

1. On munit $\mathbb{R}^3$ des lois d'addition et de multiplication par un réel comme suit : $(x;y;z) + (x';y';z') = (x+x';y+y';z+z')$ et $\alpha(x;y;z) = (\alpha x; \alpha y; \alpha z)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère les vecteurs : $\overrightarrow{u} = -1;-4;5)$ et $\overrightarrow{v} = (1;2;4)$.

a Montrer que le vecteurs $\overrightarrow{w}=(3;18;-30)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

b Le vecteur $\overrightarrow{p}=(-7;1;4)$ peut-il s'écrire comme combainaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$? Justifier.

2 Dans l'espace vectoriel $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;.)$, on considère les fonctions suivantes :

$$\omega_1 : x \mapsto e^{-2x}\cos x \ ; \quad \omega_2 : x \mapsto e^{-2x}\sin x$$

Et l'ensemble : $E=\left\{\alpha\omega_1+\beta\omega_2 \ / \ (\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$

a Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;.)$.

b Montrer que si $f\in E$, alors $f'\in E$.(f' étant la dérivée de la fonction f).

c Soit $a\in\mathbb{R}$ et considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x)=e^{-2x}\cos(x+a)$.
Montrer que f_a est une combinaison linéaire de ω_1 et ω_2.

3 Soit σ un nombre complexe non réel (c'est-à-dire $\sigma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$).
Montrer que tout nombre complexe est combinaison linéaire de 1 et σ.

b FAMILLES LIBRES - FAMILLES LIEÉS

D Définition

Soit E un espace vectoriel réel, $n\in\mathbb{N}^*$ et $(\overrightarrow{x_1};\overrightarrow{x_2};\dots;\overrightarrow{x_n})$ une fammille de vecteur de E.

- On dit que la famille $(\overrightarrow{x_1};\overrightarrow{x_2};\dots;\overrightarrow{x_n})$ est une famille libre de E, si :

$$\forall(\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n \ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{x_i}=\overrightarrow{0} \implies \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$$

  On dit encore dans ce cas-là que les vecteurs $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\dots,\overrightarrow{x_n}$ sont linairement indépendants.

- On dit que la famille $(\overrightarrow{x_1};\overrightarrow{x_2};\dots;\overrightarrow{x_n})$ est une famille liée de , si elle n'est pas libre. Cela signifie qu'il existe une famille $(\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_n)$ des réels non tous nuls vérifiant $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{x_i}=\overrightarrow{0}$:
  On dit encore dans ce cas-là que les vecteurs $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\dots,\overrightarrow{x_n}$ sont linairement dépendants.

Remarque

Dans la pratique, lorsqu'on s'intéresse à la liberté éventuelle d'une famille $(\overrightarrow{x_1};\overrightarrow{x_2};\dots;\overrightarrow{x_n})$, on considère $(\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{x_i}=\overrightarrow{0}$. Si cette égalité nous conduit forcément vers $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$, alors la famille $(\overrightarrow{x_1};\overrightarrow{x_2};\dots;\overrightarrow{x_n})$ est libre. Dans le cas contraire, elle est liée.

Exemple

1. On considère dans $E=\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;3)$; $\overrightarrow{u_2}=(1;-3;-1)$; $\overrightarrow{u_3}=(0;1;1)$.
Montrer que la famille $(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_3})$ est liée.
2. On considère dans $E=\mathscr{P}_3$ les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 définis sur $\mathbb{R}$ par : $P_1(x)=x^3-1$; $P_2(x)=x^3+x$; $P_3(x)=x^2-x$; $P_4(x)=-1+x^2$.
Montrer que la famille $(P_1;P_2;P_3;P_4)$ est libre.
3. Montrer que toute famille de vecteurs $(\overrightarrow{x_1};\overrightarrow{x_2};\ldots;\overrightarrow{x_n})$ contenenant un vecteur nul est liée.
4. Soit $\sigma\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.
Montrer que la famille $(1;\sigma)$ est une famille libre dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;.)$.
5. On considère dans $E=\mathbb{R}^3$ les vecteurs :
$$\overrightarrow{u}=(\cos a;\cos b;\cos c)\quad;\quad\overrightarrow{v}=(\sin a;\sin b;\sin c)\quad;$$
$$\overrightarrow{w}=(\sin(x+a);\sin(x+b);\sin(x+c))\text{ où }(a;b;c;x)\in\mathbb{R}^4.$$
Montrer que la famille $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w})$ est liée.

Application

1. Dans l'espace vectoriel réel $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;.)$, on considère les fonctions :
$$f:x\mapsto x+1\quad;\quad g:x\mapsto x^2\quad;\quad h:x\mapsto x^2-x+3$$
Montrer que la famiile $(f;g;h)$ est libre.
2. Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;.)$, on considère les matrices :
$$A=\begin{pmatrix}2&6\\3&4\end{pmatrix}\ ;D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\ ;J=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$$
   a. Montrer que la famille $(D;J)$ est libre et que la famille $(A;D;J)$ est liée.
   b. La famille $(A;D)$ est-elle libre ?Justiier.
3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, déterminer si les familles de vecteurs suivants sont libres ou liées :
   a. $\overrightarrow{u}=(1;2;3)$ et $\overrightarrow{v}=(3;2;1)$
   b. $\overrightarrow{u}=(-1;0;2)$; $\overrightarrow{v}=(0;1;-2)$ et $\overrightarrow{w}=(2;1;0)$
   c. $\overrightarrow{u}=(7;2;-1)$; $\overrightarrow{v}=(1;-3;2)$; $\overrightarrow{w}=(5;1;1)$ et $\overrightarrow{t}=(-2;1;3)$

Propriété

Soit E un espace vectoriel réel.

1. Une famille $(\overrightarrow{x})$ constituée d'un seul vecteur est libre si, et seulement si, $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$.
2. les éléments d'une famille libre sont deux à deux distinsts.
3. Si une famille $B = (\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \dots; \overrightarrow{x_n})$ est libre, alors toute famille contenue dans B est aussi libre.
4. Si une famille $B = (\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \dots; \overrightarrow{x_n})$ est liée, alors toute famille contenant dans B est aussi liée.
5. Une famille $B = (\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \dots; \overrightarrow{x_n})$ est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs de B est une combinaison linéaire de $n-1$ autres.

• Preuve

c FAMILLES GÉNÉRATRICES

D Définition

Soit E une espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \dots; \overrightarrow{x_n})$ une famille de vecteurs de E.
• On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{x}$ est engendré par la famille $(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \dots; \overrightarrow{x_n})$ s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille. Autrement dit :

$$(\exists(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{R}^n) \quad \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_i}$$

• On dit que la famille $(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \dots; \overrightarrow{x_n})$ est une famille génératrice de E, si :

$$(\forall \overrightarrow{x} \in E)\,(\exists(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{R}^n) \quad \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_i}$$

On dit encore dans ce cas-là que la famille $(\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \dots; \overrightarrow{x_n})$ engendre l'espace vectoriel E.

Exemple

1. La famille $(1; i)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}; +; .)$ car tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors la famille des vecteurs $(e_1; e_2; \dots; e_n)$ définie par :

$$e_1 = (1; 0; \dots; 0) \quad ; \quad e_2 = (0; 1; \dots; 0) \dots \quad ; \quad e_1 = (0; 0; \dots; 1)$$

est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^n; +; .)$, puisque, pour tout vecteur $\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \dots; \overrightarrow{x_n})$, on a : $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_1} = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n \overrightarrow{e_n}$

En pratique, on se contente de $n \in \{2; 3; 4\}$. Géométriquement, on «voit» que :

◊ deus vecteurs non colinéaires du plan forme une partie génératrice.

◊ trois vecteurs non coplanaires de l'espace forme une partie génératrice.

3 Désignons par E l'espace vectoriel réel constitué par les suites arithmétiques. Considérons les deux suites $U=(u_n)$ et $V=(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n=n$ et $v_n=1$. Montrer que $(U;V)$ est une partie génératrice de E.

Application

1 Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;.)$, on considère les matrices :

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\ ;\quad M_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\ ;\text{t}\quad M_3=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$$

Montrer que la famille $(M_1;(M_2;(M_3)$ engendre la matrice $M=\begin{pmatrix}1&4\\10&-4\end{pmatrix}$

2 On rappelle que $(\mathscr{P}_3;+;.)$ est l'espace vectoriel des polyômes de dgré inférieur ou égale à 3. On considère la famille $B=(f_1;f_2;f_3;f_4)$ formée par les fonctions :

$$f_1:x\mapsto x^2-4x+1\quad;\quad f_2:x\mapsto -x^2+2\quad;\quad f_3:x\mapsto 3x-4\quad;\quad f_4:x\mapsto 4x^3+x$$

dans chacun des cas suivants, la fonction f est-elle engendré par la famille B ?

a $f:x\mapsto -4x^3+5x^2-13x-1$ | b $f:x\mapsto 5x+7$ | c $f:x\mapsto 0$

3 Montrer que la famille $B=((1;2);(-1;1);(2;1))$ est génératrice de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;.)$.

4 On pose $\vec{u}=(-5;3)$ et $\vec{v}=(a;9)$. Déterminer les valeurs de a pour lequelles la famille $B=(\vec{u};\vec{v})$ engendre l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;.)$.

d Bases d'un espaces vectoriel

D Définition

Soit E un espace vectiriel réel, $n\in\mathbb{N}^*$ et $B=(\vec{x_1};\vec{x_2};\ldots;\vec{x_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille B est une base de E si c'est une famille libre et générératrice de E, ce qui revient à écrire : $(\forall\vec{x}\in E)\,(\exists!(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n)\quad \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x_i}$

Dans ces conditions, les nombres $\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n$ s'appellent les composantes (ou coordonnées) du vecteur $\vec{x}$ dans la base B, et on écrit $\vec{x}(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)_{(B)}$ ou simplement $\vec{x}(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)$.
Le réel α_k s'appelle la k^{ime} composant de $\vec{x}$ dans la base B.

Remarque

• Plaçons-nous dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^n;+;.)$. On a déjà vu que la famille de vecteurs $B=(\vec{e_1};\vec{e_2};\ldots;\vec{e_n})$ définie par :

$$\vec{e_1} = (1;0;\ldots;0) \;\; ; \;\; \vec{e_2} = (0;1;\ldots;0) \;\; ; \;\; \vec{e_3} = (0;0;1;0\ldots;0) \;\; ; \;\; \vec{e_1} = (0;0;\ldots;1)$$

est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel. par ailleurs, si $\alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_n\vec{e_n} = \vec{0}$, alors $(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) = (0;0;\ldots;0)$, d'ou $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, ce qui montre que la famille B est libre. C'est donc une base, appelée base canonique de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^n;+;.)$. C'est la base la plus naturelle et la plus simple de $\mathbb{R}^n$.

• Une fois choisie une base $B = (\vec{x_1};\vec{x_2};\ldots;\vec{x_n})$ de E, il arrive souvent que l'on identifie chaque vecteurs $\vec{x} \in E$ avec le $n-$uplet de ses composantes. C'est pourquoi, une base doit être une famille (ordonnée et non pas un ensemble). Par exemple, si $B = (\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ est une base de E, alors le vecteur de composantes $(1;2;3)$ dans la base B est : $\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$ et non pas $\vec{e_2} + 2\vec{e_1} + 3\vec{e_3}$

Exemple

1. Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;.)$, la famille $B = (\vec{e_1};\vec{e_2})$ avec $e_1 = (1;0)$ et $e_2 = (0;1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. C'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;+;.))$, la famille $B = (\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ avec $e_1 = (1;0;0)$, $e_2 = (0;1;0)$ et $e_3 = (0;0;1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. C'est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. La famille $(1;i)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C};+;.)$.
4. On pose $E = \mathscr{P}_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les polynômes suivants :

$$P_0 : x \mapsto 1 \;\; ; \;\; P_1 : x \mapsto x \;\; ; \;\; P_2 : x \mapsto x^2 \;\; ; \;\; P_3 : x \mapsto x^3 \;\; ; \;\; \cdot \;\; ; \; P_n : x \mapsto x^n$$

Montrer que la famille $B = (P_0;P_1;\ldots;P_n)$ est une base de l'espace vectoriel réel $_n$.

5. La famille $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;.)$

Application

1. On considère l'ensemble : $E = \left\{(a;a;b) \;/\; (a;b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   a. Montrer que $(E;+;.)$ est un espace vectoriel réel.
   b. Déterminer une base de $(E;+;.)$.
2. On considère l'ensemble suivant : $E = \left\{f : x \mapsto (ax+b)e^{2x} \;/\; (a;b) \in \mathbb{R}^2\right\}$
   a. Montrer que $(E;+;.)$ est un espace vectoriel réel.
   b. Soit f_1 et f_2 les fonctions numérique définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$. Montrer que la famille $B = (f_1;f_2)$ est une base de l'espace vectoriel E.
   c. Montrer que la fonction $u : x \mapsto \int_0^x \left(t+\frac{1}{2}\right) e^{2t} dt$ est un élément de E puis déterminer ses coordonnées dans la base B.
3. Soit E l'ensemble des fonctions nuériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = P(x)\cos x + Q(x)\sin x$ où P et Q sont des fonctions affines. (C'est-à-dire de la forme $x \mapsto ax+b$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$)
   a. Montrer que $(E;+;.)$ est un espace vectoriel réel.
   b. On considère la famille $B = (f_1;f_2;f_3;f_4)$ telle que :

$$f_1(x) = \cos x \quad ; \quad f_2(x) = \sin x \quad ; \quad f_3(x) = x\cos x \quad ; \quad f_4(x) = x\sin x$$

Montrer que B est une base de l'espace vectoriel E.

c Montrer que la fonction $h : x \mapsto \cos(x+a)$ avec $a \in \mathbb{R}$ est un élément de E puis déterminer ses coordonnées dans la base B.

Propriété

Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (\vec{x_1}; \vec{x_2}; \ldots; \vec{x_n})$ une base de E. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E tels que : $\vec{x}(\alpha_1; \ldots; \alpha_n)_{(B)}$ et $\vec{y}(\beta_1; \ldots; \beta_n)_{(B)}$. Alor :

$$\vec{x} + \vec{y}(\alpha_1 + \beta_1; \ldots; \alpha_n + \beta_n)_{(B)} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{x}(\lambda\alpha_1; \ldots; \lambda\alpha_n)_{(B)} \quad (\text{Où } \lambda \in \mathbb{R})$$

e DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

Propriété

Soit E un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (\vec{x_1}; \vec{x_2}; \ldots; \vec{x_n})$ une base de E. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé la dimension de E et noté $\dim E$, et on écrit $\dim E = n$

Exemple

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dim \mathbb{R}^n = n$. En particulier :
- L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}$ est de dimension 1. Il admet pour base $B = (1)$ et plus généralement toute famille formée d'un unique élément non nul.
- L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. Il admet pour base $B = ((1;0);(0;1))$.
- L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. Il admet pour base $B = ((1;0;0);(0;1;0);(0;0;1))$.

Ainsi $\dim \mathbb{R} = 1$; $\dim \mathbb{R}^2 = 2$; $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

2 L'espace vectoriel $(\mathbb{C}; +; \times)$ est de dimension 2 : $\dim \mathbb{C} = 2$.

3 L'espace vectoriel réel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; .)$ est de dimension 4 : $\dim \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = 4$. Il admet pour base $B = (A_1; A_2; A_3; A_4)$ avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Plaçcons-nous dans l'espace vectoriel $(\mathscr{V}_3; +; .)$ constitué par les vecteurs de l'espace ordinaire. On a déjà vu dans le cours de géométrie dans l'espace (1^{re} année du bac) que $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ est une base de $\mathscr{V}_3$ avec : $\vec{i} = (1;0;0)$; $\vec{j} = (0;1;0)$; $\vec{k} = (0;0;1)$. Il s'ensuit que $\dim \mathscr{V}_3 = 3$. Soit maintenant F un sous espace vectoriel de $(\mathscr{V}_3; +; .)$ différent de $\left\{\vec{0}\right\}$.
- Si $\dim F = 1$, alors F est un espace vectoriel engendré par un vacteur non nul $\vec{u}$. On dit alors que F est la droite vectoriel de direction $\vec{u}$.
- Si $\dim F = 2$, alors F est un espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On dit alors que F est le plan vectoriel dérigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Application

1 On considère l'ensemble $E=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y-z=0\right\}$
On munit E de l'addition «+» et la multiplication par un réel définies sur $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $(E;+;.)$ est un espace vectoriel réel puis dédterminer sa dimension.

2 On considère l'ensemble $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
Montrer que $(K;+;.)$ est un espace vectoriel réel puis déterminer sa dimension.

3 Soit E l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(a\sin x+b\cos x)e^{3x}$ où $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

- a Montrer que E, muni de l'addition des fonctions et la multiplication par un réel : est un espace vectoriel réel.
- b On considère la famille $(f_1;f_2)$ telle que : $f_1(x)=e^{3x}\cos x$ et $f_2(x)=e^{3x}\sin x$.
Montrer que B est une base de E.
- c Soit f un élément de . Montrer que f' est un élément de E et déterminer les coordonnées de f' dans la base E

Propriété

1 Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $B=\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base de E.
Soit $B'=(\vec{u};\vec{v})$ une famille de vecteurs de E tels que $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ dans la base B.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a (B' est une base de$E$) ;
- b (B'est génératrice de$E$) ;
- c (B'est libre dans$E$)
- d $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b'\end{vmatrix}\neq 0$

2 Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $B=\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de E.
Soit $B'=(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ une famille de vecteurs de E tels que $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ et $\vec{w}(a";b";c")$ dans la base B. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a (B' est une base de$E$) ;
- b (B'est génératrice de$E$) ;
- c (B'est libre dans$E$) ;
- d $\begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c"\end{vmatrix}\neq 0$

Remarque

La propriété précédente est d'une importance pratique capitale. Elle affirme qu'une famille de cardinal égale à la dimension de l'espace vectoriel devient une base dès qu'elle libre ou génératrice. En pratique, il est plus facile de vérifier qu'elle est libre soit en calculant le déterminant par un calcul direct.