

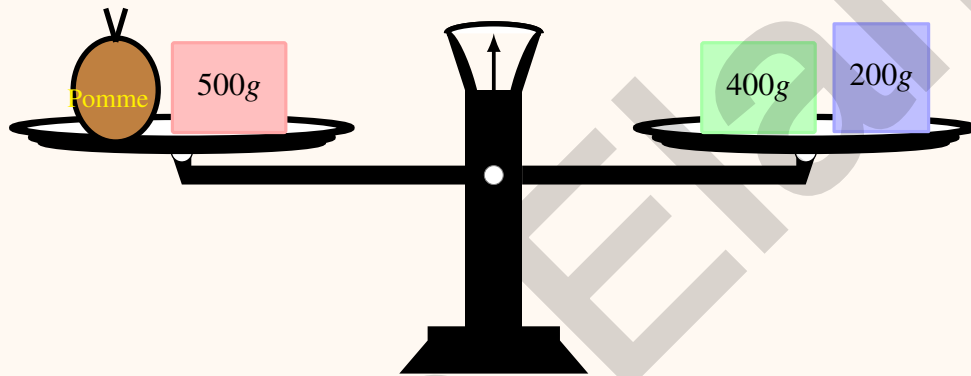
Les équations



Équation du premier degré à une incon-

Activité

On met dans le plateau d'une balance une masse de 500g et une pomme, et dans l'autre plateau deux masses de 400g et 200g



On considère que la masse de la pomme est : xg (g désigne gramme) et la balance est en équilibre

- 1 Écrire l'égalité qui exprime l'état d'équilibre de la balance
- 2 Déterminer la valeur de x , la masse de la pomme

Définition

Une équation est une **égalité** dans laquelle interviennent un ou plusieurs nombres inconnus. Ces nombres inconnus sont le plus souvent désignés par des lettres.

• Exemple

- * $x + 5 = 13$ est une équation d'inconnue x
- * $3a + 1 = -7b + 3$ est une équation d'inconnues a et b

Définition

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs

Chaque égalité de la forme $a + x = b$ ou bien de la forme $ax = b$ (avec $a \neq 0$) s'appelle **équation du premier degré à une inconnue x**

La valeur de x qui vérifie l'équation s'appelle **solution** de l'équation

EXEMPLES

★ $x - 4 = 10$

★ $2x = 3$

★ $-15 + x = 16$

★ $-10x = 1$

Ces égalités s'appellent des équations du premier degré

Application

1 Soit l'équation : $2x + 4 = 0$

Parmi les nombres : $-2, 1, 0$ et 2 , lequel est solution de cette équation ?

2 Soit l'équation : $7x - 4 = 17$

Parmi les nombres : $-3, -1, 1, 3$ et 5 , lequel est solution de cette équation ?

Solution

1 -2

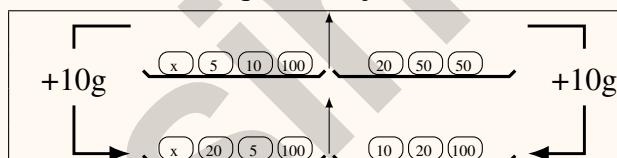
2 3



Résoudre une équation du premier de-

Activité

1 Trouver la masse qui a été ajoutée ou retirée entre les deux séries de balances en équilibre

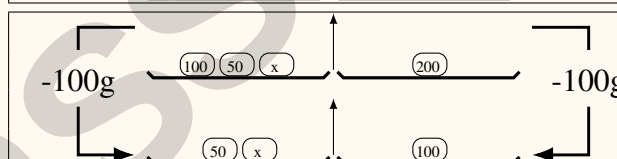


Solution évidente pour l'équilibre n°1 :

$x = 5$

Solution évidente pour l'équilibre n°2 :

$x = 5$



Solution évidente pour l'équilibre n°1 :

$x = 50$

Solution évidente pour l'équilibre n°2 :

$x = 50$

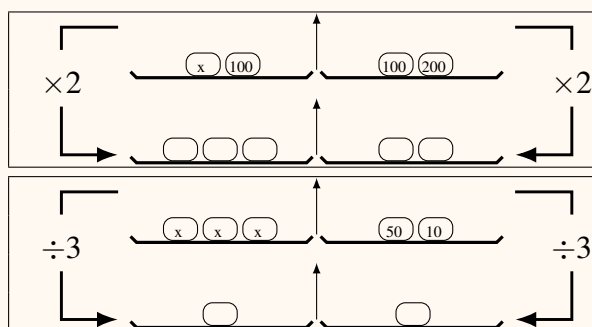
Conclusion : On peut, sans modifier l'équilibre, **additionner ou soustraire une même masse** sur les deux plateaux d'une balance

Autrement dit, on peut écrire les transformations équations suivantes tout en conservant les mêmes solutions

$$\begin{array}{lcl} \boxed{+10} & x + 115 = 120 & \boxed{+10} \\ \rightarrow & & \leftarrow \\ & x + 125 = 130 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \boxed{-100} & 150 + x = 200 & \boxed{-100} \\ \rightarrow & & \leftarrow \\ & 50 + x = 100 & \end{array}$$

2 Trouver la masse marquée sur les plateaux qui conservent l'équilibre entre les deux séries de balances



Solution évidente pour l'équilibre n°1 :
 $x = 200$

Solution évidente pour l'équilibre n°2 :
 $x = 200$

Solution évidente pour l'équilibre n°1 :
 $x = 20$

Solution évidente pour l'équilibre n°2 :
 $x = 20$

Conclusion : On peut, sans modifier l'équilibre, **additionner ou soustraire une même masse** sur les deux plateaux d'une balance

Autrement dit, on peut écrire les transformations équations suivantes tout en conservant les mêmes solutions

$$\begin{array}{ccc} \swarrow \times 2 & x + 100 = 300 & \searrow \times 2 \\ \rightarrow 2x + 200 = 600 & \leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow \div 3 & 3x = 60 & \searrow \div 3 \\ \rightarrow x = 20 & \leftarrow & \end{array}$$

On retiendra :

- Deux équations qui ont les mêmes solutions sont dites **équivalentes**
- Les **différentes transformations** possibles entre deux équations **équivalentes** sont :
 - ☐ **Ajouter** ou **retrancher** le même nombre à chacun des deux membres
 - ☐ **Multiplier** ou **diviser** par le même nombre à chacun des deux membres
- **L'intérêt de 'Transformer une équation'** est de trouver **ses solutions**

Définition

Résoudre une équation d'inconnue x , c'est trouver les valeurs **possibles** du nombre x qui vérifiant l'égalité, c'est à dire que l'égalité soit vraie

Chacune de ces valeurs est une **solution de l'équation**

1

Résoudre une équation de la forme : $a + x = b$

Règle

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs

La solution de l'équation $a + x = b$ (ou $x + a = b$) est le nombre $x = b - a$

Exemple

La solution de l'équation : $x + 2 = -7$ est $x = -7 - 2$

Donc $x = -9$

2 Résolution de l'équation $ax = b$

Règle

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs

La solution de l'équation $ax = b$ est le nombre $x = \frac{b}{a}$

• Exemple

La solution de l'équation : $-4x = 12$ est $x = \frac{12}{-4}$

Donc $x = -3$



Propriétés

Propriété

Une égalité reste vraie **si on ajoute** ou **si on soustrait** un même nombre à ses deux membres

Autrement dit :

Si a , b et c sont des nombres décimaux relatifs

Si $a = b$ alors : $a + c = b + c$

Et : $a - c = b - c$

EXEMPLES

► On a : $x - 2 = -3$

Donc : $x - 2 + 2 = -3 + 2$ (On a ajouté 2 aux deux membres)

Donc : $x = -3 + 2$

Alors : $x = -1$

► On a : $x + 3 = 5$

Donc : $x + 3 - 3 = 5 - 3$ (On a retranché 3 des deux membres)

Donc : $x = 5 - 3$

Alors : $x = 2$

Propriété

Une égalité reste vraie **si on multiplie** ou **si on divise** ses deux membres par un même nombre **non nul**

Autrement dit :

Si a , b , c et d sont des nombres décimaux relatifs (avec $d \neq 0$)

Si $a = b$ alors : $a \times c = b \times c$

Et : $\frac{a}{d} = \frac{b}{d}$

EXEMPLES

► On a : $3x = -12$

Donc : $\frac{3x}{3} = \frac{-12}{3}$ (On a divisé les deux membres par 3)

Donc : $x = \frac{-12}{3}$

Alors : $x = -4$

► On a : $\frac{x}{4} = 1$

Donc : $\frac{x}{4} \times 4 = 1 \times 4$ (On a multiplié les deux membres par 4)

Donc : $x = 1 \times 4$

Alors : $x = 4$

ASTUCE :

Technique

En pratique, on utilise une **méthode plus rapide**

► Lorsque l'on **passé un membre d'un autre côté** quand il est **ajouté ou soustrait**, on le transforme en son **opposé**

► Lorsque l'on **passé un membre d'un autre côté** quand il est **multiplié**, on le transforme en son **inverse**

• Exemple

Résoudre l'équation suivante : $3x - 5 = x + 1$

On a : $3x - 5 = x + 1$

$3x - x = 1 + 5$

$2x = 6$

$x = \frac{6}{2}$

$x = 3$

Donc la solution de cet équation est 3

Cas particuliers :

► L'équation : $0 \times x = b$ [$0x = b$] (avec $b \neq 0$), n'admet pas de solution

► La solution de l'équation : $a \times x = 0$ [$ax = 0$] (avec $a \neq 0$) est le nombre 0

► Pour l'équation : $0 \times x = 0$ [$0x = 0$], tous les nombres décimaux relatifs sont solution de cette équation

• Exemple

■ Résoudre l'équation suivante : $3x - 5 = 3x + 1$

On a : $3x - 6 = 3x + 2$

Donc : $3x - 3x = 2 + 6$

Donc : $0 \times x = 8$

Donc : $0 = 8$ (impossible)

Donc l'équation n'admet pas de solution

■ Résoudre l'équation suivante : $5x + 6 = 5(x + 1) + 1$

On a : $5x + 7 = 5(x + 2) - 3$

Donc : $5x + 7 = 5x + 10 - 3$

Donc : $5x + 7 = 5x + 7$

Donc : $5x - 5x = 7 - 7$

Donc : $0 = 0$

Donc tous les nombres décimaux relatifs sont solutions de cette équation

Application

Résoudre les équations suivantes :

$$\diamond 3x + 4 = 2x + 9$$

$$\diamond 2x + 3 = 3x - 5$$

$$\diamond 5x - 1 = 2x + 4$$

$$\diamond 3x + 1 = 7x + 5$$

$$\diamond 5(x - 1) + 3(2 - x) = 0$$

$$\diamond 7(x + 4) - 3(x + 2) = x + 7$$

Solution

$$\diamond x = 5$$

$$\diamond x = 8$$

$$\diamond x = \frac{5}{3}$$

$$\diamond x = -1$$

$$\diamond x = \frac{-1}{2}$$

$$\diamond x = -5$$

IV

Résolution des problèmes

Activité

Soit ABC un triangle de périmètre $30m$

Les longueurs des cotés du triangle ABC sont trois nombres entiers naturel consécutifs

Déterminer la longueur de chaque coté

Définition

- ❖ Mettre en équation un problème, c'est traduire son énoncé par une égalité mathématique avec une inconnue
- ❖ Résoudre l'équation trouvée permet de répondre au problème posé

Règle

Pour résoudre un problème, on suit les étapes suivantes :

- ❖ ❶ Choix de l'inconnue
- ❖ ❷ Mise en équation du problème

- ❖ ③ Résolution de l'équation
- ❖ ④ Conclusion

• Exemple

Aya et Nihad choisissent un même nombre

► Aya multiplie ce nombre par 5 et ajoute 17 au résultat

► Nihad ajoute 29 au nombre choisi

Elles trouvent le même résultat final

Quel est le nombre qu'elles ont choisi au départ ?

- ◆ ① Choix de l'inconnue
On note x le nombre choisi au départ par Nihad et Aya
- ◆ ② Mise en équation
Aya a multiplié ce nombre par 5 et ajoute 17
C'est à dire : $5x + 17$
Nihad ajoute 29 au nombre choisi
C'est à dire : $x + 29$
Aya et Nihad trouvent le même résultat
C'est à dire : $5x + 17 = x + 29$
- ◆ ③ Résolution de l'équation
On a : $5x + 17 = x + 29$
Donc : $5x - x = 29 - 17$
Donc : $4x = 12$
Donc : $x = \frac{12}{4}$
Donc : $x = 3$
Donc la solution de cette équation est 3
- ◆ ④ Conclusion
✓ Le nombre choisi au départ est 3

Application

Déterminer un nombre sachant que si on le multiplie par 4 et qu'on ajoute 3 au résultat, on trouve le même nombre que si on le multipliait par 5 et qu'on retranchait 4 du résultat

Solution

- * ① Choix de l'inconnue
On note a le nombre cherché

* ② Mise en équation

Si on multiplie ce nombre par 4 et on ajoute 13 au résultat

C'est à dire : $4a + 3$

Si on multiplie ce nombre par 5 et on retranche 4 au résultat

C'est à dire : $5a - 4$

Dans les deux cas, on trouve le même résultat final

C'est à dire : $4a + 3 = 5a - 4$

* ③ Résolution de l'équation

On a : $4a + 3 = 5a - 4$

Donc : $4a - 5a = -4 - 3$

Donc : $-a = -7$

Donc : $a = 7$

Donc la solution de cette équation est 7

* ④ Conclusion

✓ Le nombre cherché est 7