Chapitre

Équation d'une droite

I L'équation réduite d'une droite

1 Définition

Définition

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé , chaque droite admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$

- m est appelé le coefficient directeur (la pente) de la droite
- p est appelé l'ordonnée à l'origine

2 Exemples

Exemple

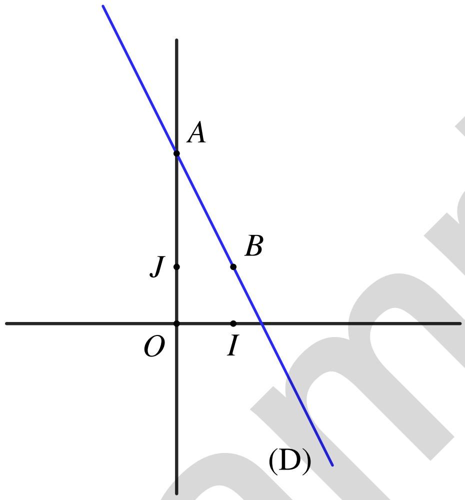
1. Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine des droites $(D) : y = 2x + 3$ et $(\Delta) : y = -x$
2. Déterminer l'équation réduite de la droite $(D) : 2y + 3x - 1 = 0$
3. Construire, dans un repère orthonormé , la droite $(\Delta) : y = -2x + 3$

Solution

1. Déterminons la pente et l'ordonnée à l'origine des droites (D) et (Δ)
   → $(D) : y = 2x + 3$ est l'équation réduite de la droite (D) de pente $m = 2$ et d'ordonnée à l'origine $p = 3$
   → $(\Delta) : y = -x$ est l'équation réduite de la droite (Δ) de pente $m = -1$ et d'ordonnée à l'origine $p = 0$
2. Déterminons l'équation réduite de la droite (D)
   On a $2y + 3x - 1 = 0$, on isole y, donc $2y = -3x + 1$
   C'est à dire $y = \frac{-3x+1}{2}$, donc $y = \frac{-3}{2}x + \frac{1}{2}$
   Alors $(D) : y = \frac{-3}{2}x + \frac{1}{2}$, c'est l'équation réduite de la droite (D) de pente $m = \frac{-3}{2}$ et d'ordonnée à l'origine $p = \frac{1}{2}$
3. Construisons la droite (Δ)
   On considère la droite $(\Delta) : y = -2x + 3$
   Pour construire la droite (Δ), il suffit de déterminer deux points différents de cette droite
   On peut, par exemple, choisir $x = 0$ donc $y = -2 \times 0 + 3 = 3$
   Et choisir $x = 1$ donc $y = -2 \times 1 + 3 = 1$

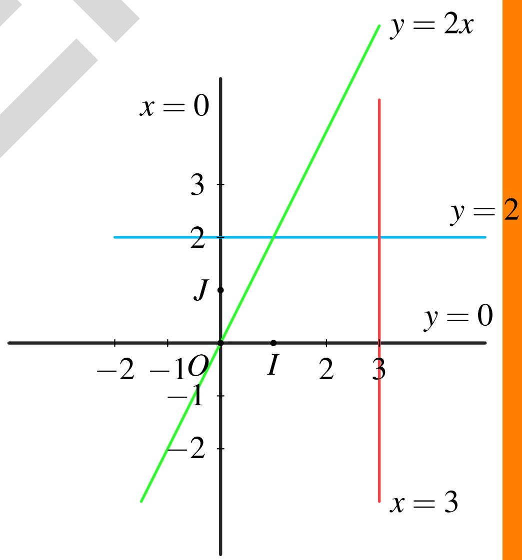
On considère le tableau suivant :

x	0	1
y	-2	1
$M(x;y)$	$A(0;-2)$	$B(1;1)$



3 Cas particulier

- ✭ L'équation de l'axe des abscisses est $y=0$
- ✭ L'équation de l'axe des ordonnées est $x=0$
- ✭ L'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses (droite horizontale) et passante par le point Ṃab est $y=b$
- ✭ L'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (droite verticale) et passante par le point Ṃab est $x=a$
- ✭ L'équation de la droite passante par l'origine du repère s'écrit sous la forme $y=mx$ (l'ordonnée à l'origine est nul)



⚠ Un point appartient à une droite, si et seulement si, ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite

Exemple

1. Vérifier que le point Ą21 appartient à la droite (D) : $y=2x-3$
2. Déterminer, dans chaque cas, l'équation réduite de la droite (AB)
   - a Ąay_A et Ḅay_B
   - b Ąx_Ab et Ḅx_Bb

Solution

1. Vérifions que le point $A \in (D)$
   On a $2x_A - 3 = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1 = y_A$
   Donc $A \in (D)$
2. Déterminons l'équation réduite de(AB)
   a. A̧ay_A et B̧ay_B
   L'équation de la droite (AB) est $x = a$
   b. A̧x_Ab et B̧x_Bb
   L'équation de la droite (AB) est $y = b$

II Détermination de l'équation d'une droite

1 La pente d'une droite définie par deux points

Proposition

Si A̧x_Ay_A et B̧x_By_B sont deux points du plan rapporté à un repère orthonormé , tel que $x_A \neq x_B$
Alors, la pente de la droite (AB) est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Remarque

☆ $m = \dfrac{\text{Différence des ordonnées}}{\text{Différences des abscisses}}$ en gardant l'ordre

• Exemple

On considère les points A̧$-1-3$ et B̧-40
Déterminer la pente de la droite (AB)

Solution

Déterminons la pente de la droite (AB)
La pente de la droite (AB) est :
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0+3}{-4+1} = \dfrac{3}{-3}$
Donc $m = -1$

2 Détermination de l'équation réduite d'une droite définie par deux point

➡ Déterminons l'équation de la droite (AB) tel que A̧$1-2$ et B̧-23
L'équation réduite de la droite (AB) est de la forme $y = mx + p$

① Détermination de m

On a $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{3+2}{-2-1}=\dfrac{5}{-3}=\dfrac{-5}{3}$

D'ou : $(AB): y=\dfrac{-5}{3}x+p$

② Détermination de p

On a $A\in(AB)$, donc $y_A=\dfrac{-5}{3}x_A+p$

Donc $-2=\dfrac{-5}{3}\times 1+p$, c'est à dire $-2=\dfrac{-5}{3}+p$

D'ou $p=-2+\dfrac{5}{3}$ donc $p=\dfrac{-1}{3}$

Alors, l'équation réduite de la droite (AB) est $(AB): y=\dfrac{-5}{3}x-\dfrac{1}{3}$

3 Détermination de l'équation d'une droite définie par sa pente et un point

Déterminons l'équation réduite de la droite (Δ) de pente 3 et qui passe par le point $E2-1$

On a l'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit sous la forme $(\Delta): y=3x+p$

♦ Détermination de p

On a $E\in(\Delta)$, donc $y_E=3x_E+p$

Donc $-1=3\times 2+p$, c'est à dire $-1=6+p$

D'ou $p=-1-6$ donc $p=-7$

Alors, l'équation réduite de la droite (Δ) est $(\Delta): y=3x-7$

Application

Soient les points $A11$ et $B2-1$

Montrer que l'équation réduite de la droite (AB) est $y=-2x+3$

Solution

Montrons que $(AB): y=-2x+3$

✯ Méthode ① Vérification

On a $\begin{cases}-2x_A+3=-2\times 1+3=-2+3=1=y_A\\ -2x_B+3=-2\times 2+3=-4+3=-1=y_B\end{cases}$

Donc les deux points A et B vérifient l'équation $y=-2x+3$

Alors $(AB): y=-2x+3$

✯ Méthode ② Vérification

On a $(AB): y=mx+p$

On a $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-1-1}{2-1}=\dfrac{-2}{1}=-2$

donc $(AB): y=-2x+p$

Or $A\in(AB)$, donc $y_A=-2x_A+p$

Donc $1=-2\times 1+p=-2+p$, donc $p=1+2=3$

Alors $(AB): y=-2x+3$

III Parallélisme et orthogonalité de deux droites

1 Condition de parallélisme de deux droites

Proposition

Soient (D) et (Δ) deux droites tel que : $(D) : y = mx + p$ et $(\Delta) : y = m'x + p'$
✪ $(D) \parallel (\Delta)$ est équivalent à $m = m'$
Autrement dit : Deux droites sont parallèles si est seulement s'ils ont la même pente

• Exemple

On considère les deux droites $(D_1) : y = -2x + 1$ et $(D_2) : y = -2x + 5$
Est-ce-que $(D_1) \parallel (D_2)$?

Solution

La pente de la droite (D_1) est -2, et la pente de la droite (D_2) est -2
Donc les deux droites (D_1) et (D_2) ont la même pente (-2), alors $(D_1) \parallel (D_2)$

Application

On considère la droite $(D) : y = 2x - 1$

1. Est-ce-que A̧$-12 \in (D)$?
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) passante par A et parallèle à (D)

Solution

1. Est-ce-que $A \in (D)$?
   On a $2x_A - 1 = 2 \times (-1) - 1 = -2 - 1 = -3 \neq 2$
   Donc $A \notin (D)$
2. Déterminons l'équation de (Δ)
   L'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit sous la forme $y = mx + p$
   Puisque $(D) \parallel (\Delta)$ donc $m = 2$
   Donc $(\Delta) : y = 2x + p$
   ✪Déterminons p
   On a $A \in (\Delta)$, donc $y_A = 2x_A + p$, c'est à dire $2 = 2 \times (-1) + p = -2 + p$
   Donc $p = 2 + 2 = 4$
   Alors $(\Delta) : y = 2x + 4$

2 Condition d'orthogonalité de deux droites

Proposition

Soient (D) et (Δ) deux droites tel que : $(D) : y = mx + p$ et $(\Delta) : y = m'x + p'$
✪ $(D) \perp (\Delta)$ est équivalent à $m \times m' = -1$
Autrement dit : Deux droites sont perpendiculaires si est seulement si le produit de leurs pentes est égal à -1

• Exemple

On considère les deux droites $(D) : y = -\dfrac{2}{3}x + 1$ et $(D') : 2y - 3x + 8 = 0$
Est-ce-que $(D_1) \perp (D_2)$?

Solution

On a $2y - 3x + 8 = 0$ est équivalente à $2y = 3x - 8$, c'est à dire $y = \dfrac{3x-8}{2}$
Donc $(D') : y = \dfrac{3}{2}x - 4$
La pente de la droite (D) est $m = -\dfrac{2}{3}$, et la pente de la droite (D') est $m' = \dfrac{3}{2}$
On a $m \times m' = -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{2} = -1$
Alors $(D_1) \perp (D_2)$

Application

On considère la droite $(D) : y = -4x + 3$

1. Montrer que Ą$0-1 \notin (D)$?
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) passante par le point A et perpendiculaire à (D)
3. On considère la droite $(D') : x - 4y - 1 = 0$, montrer que $(D) \perp (D')$

Solution

1. Montrons que $A \notin (D)$?
   On a $-4x_A + 3 = -4 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3 \neq -1$, donc $A \notin (D)$
2. Déterminons l'équation de (Δ)
   L'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit sous la forme $y = mx + p$
   Puisque $(D) \perp (\Delta)$ donc $m \times (-4) = -1$, c'est à dire $-4m = -1$
   Donc $m = \dfrac{1}{4}$
   Alors $(\Delta) : y = \dfrac{1}{4}x + p$
   ✪Déterminons p

On a $A \in (\Delta)$, donc $y_A = \frac{1}{4}x_A + p$, c'est à dire $-1 = \frac{1}{4} \times 0 + p = 0 + p$
Donc $p = -1$
Alors $(\Delta) : y = \frac{1}{4}x - 1$

3 Montrons que $(D) \perp (D')$
On a $(D') : x - 4y - 1 = 0$, donc $(D') : -4y = -x + 1$, c'est à dire $(D') : y = \frac{-x+1}{-4}$
Donc $(D') : y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ _ On a $-4 \times \frac{1}{4} = -1$, donc $(D) \perp (D')$