Chapitre

Dénombrement

I Ensemble fini - Cadinal d'un ensemble :

Définition

1. Un ensemble fini E c'est un ensemble qu'on peut dénombrer ses éléments .
2. Le nombre des éléments d'un ensemble **E** est appelé cardinal de **E** , on le note **card E**.

Remarque

1. card $(\emptyset) = 0$.
2. Soit E un ensemble .
   Si $cardE = n$ où $n \in \mathbb{N}^*$,alors il existe une bijection entre E et l'ensemble $\{1;2;3;....;n\}$.donc on peut écrire E sous forme $E = \{x_1;x_2;x_3;....;x_n\}$.
3. Soient A et B deux ensembles finis.
   $CardA = cardB$ si seulement si il existe une bijection entre A et B .

Exemple

1. Soient $A = \{1;2\}$ et $B = \{a;b;c\}$.

   Alors : $card(A) = 2$ et $card(B) = 3$
2. Soit $E = \{a;b;c;d\}$.
   a. E est un ensemble fini et $card(E) = 4$.
   b. L'application f définie de E dans $\{1;2;3;4\}$ tels que $f(a) = 1$ et $f(b) = 2$ et $f(c) = 3$ et $f(d) = 4$ est une bijection de E dans $\{1;2;3;4\}$.
   c. l'ensemble $\mathbb{N}$ est infini .

Application

On considère l'ensemble $A = \left\{E\left(\frac{11}{n}\right) \; tel\ que \;\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Montrer que l'ensemble A est fini et déterminer son cardinal.

Proposition

soient A et B deux ensembles finies, on a :

1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
2. a. Si A et B sont disjoints, alors on a : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

b Plus généralement, pour une familles d'ensembles finis A_1, A_2, ..., A_n deux à deux disjoints on a :
$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \cdots + \text{Card}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i)$.

3 si $A \subseteq E$ Alors : $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\text{ E})$, et $\text{Card}(E - A) = \text{Card}(\mathscr{C}_E^A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

EXEMPLES

Application

Dans un lycée de 100 élèves, 53 pratiquent le football et 15 le football et basket-ball et 20 pratiquent seulement basket-ball sans le football.
1. Quel est le nombre délèves qui pratiquent le basket-ball ?
2. Quel est le nombre délèves qui pratiquent au moins un sport ?
3. Quel est le nombre délèves qui ne pratiquent pas de deux sports ?

II Le principe Fondamental du dénombrement. Cardinal d'un produit cartésien.

1 Le principe Fondamental du dénombrement.

Activité

Les localités X et Y sont reliées par trois routes (a, b et c) et les localités Y et Z par deux routes (d et e). Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?

Activité

On lance une pièce de monnaie 2 fois de suite ,quel est le nombre de possibilités.

Propriété

Soit E une expérience dont les résultats nécessitent p choix .
Le 1^{re} se fait de n_1 façons distincts.
Le 2^{me} se fait de n_2 façons distincts.
...
Le p^{ime} se fait de n_p façons distincts.
Alors le nombre des résultats possible est le produit $n_1 \times n_2 \times n_3 ... \times n_p$.

Exemple

Une classe de 15 garçon et 12 filles.
Il faut un garçon et une fille pour représenter la classe.
Combien de possibilités de choix.

Application

On considère les chiffres suivants : 5-6-7-2-3.
On veut former des entiers naturels de trois chiffres distincts parmi ces chiffres.
1. Quel est le nombre de possibilitées ?
2. Combien de nombres paires peut-on former ?
3. Combien des multiples de 5 peut-on former ?

2 Cardinal d'un produit cartésien.

Propriété

Soit E et F deux ensembles finis et non vides alors : $card(E \times F) = card(E) \times card(F)$

Exemples

On suppose que card E=p et card F=q
On pose donc $E = x_1; x_2; ...; x_p$ et $F = y_1; y_2; ...; y_q$
Soit $(x_i; y_j)$ un élément de EXF
$1 \leq$ i $\leq$ p
$1 \leq$ j $\leq$ q
- Le nombre de choix possibles de x_i est p
- Le nombre de choix possibles de$y_j$est q
Alors d'après le principe fondalement de dénombrement le nombre de choix de couples $(x_i; y_j)$ est pXq .
Par suite : card(EXF)=card(E)Xcard(F)

Remarque

Soit E_1 ; E_2 ; ... ;E_n des ensembles finis et non vides alors :

$$card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n) = card(E_1) \times card(E_2) \times ... \times card(E_N).$$

• Exemple

Déterminons le nombre d'entiers naturels à deux chiffres.
Tels que le chiffre d'unité est 0 ou 1 ou 2 et le chiffre des dizaines est 5 ou 6 ou 7 ou 8.

• Exemple

Si on lance un dé deux fois de suite. quel est le nombre de possibilités ?

3 Nombre d'applications d'un ensemble à un autre.

Propriété

Soit E et F deux ensembles finis et non vides Tels que cardE= p et cardF= n .
Le nombre d'applications de E dans F est :
$(CardF)^{c}ardE=n^{p}$

EXEMPLES

On pose$E = x_1;x_2;...;x_p$.
On va construire une application f de E dans F Càd :
-L'élément$f(x_1)$dans F : n choix possibles
-L'élément$f(x_2)$dans F : n choix possibles

-L'élément$f(x_n)$ dans F : n choix possibles
Alors d'après le principe fondamental de dénombrement :
On a $nxnx...xn = n^{p}$.

• Exemple

Soit E^{m}=(1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9) et F^{N}=(C ;D ;D) deux ensembles .
1. Combien de nombres de 3 chiffres on peut former avec les éléments de E ?
2. Combien de nombre de 3 chiffres différents deux à deux on peut former avec les éléments de E ?

Application

De combien façon distincts peut-on ranger : boules de couleurs diffirentes dans 4 cases sachant que chaque case peut contenir tous les boules

4 Nombre de parties d'un ensemble

Propriété

Soit E un ensemble fini et non vide , et card E=n et soit P(E) l'ensemble des parties de E on a card P(E)=2^{n}

• Exemple

III Techniques de Dénombrement

1 Arrangement avec répétition

Activité

Combien de nombre du mots de 3 lettres choisies parmi 26 lettres (ayant un sens ou non) peut on former ?

Définition

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $1 \leq$ n et $p \in \mathbb{N}^*$
Tout élément$(x_1;x_2;...;x_p)$ du produit cartésien EXEX...XE=E^p

Tels que les éléments $x_1;x_2;...;x_p$ non nécessairement distincts; s'appelle une arrangement avec répétition de Ṕp éléments de E (ou une p-liste de E)

Propriété

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $1 \leq$ n et $p \in \mathbb{N}^*$
Le nombre d'arrangement avec répétition (remise) de p éléments de E est : n^p

Exemple

Combien de numéros de téléphone à 8 chiffres peut-on former ?

2 Arrangements sans répétition

Activité

Pour accéder à une banque de données, vous devez taper un mot de passe de 4 lettres sur votre clavier . Combien de mots de passe de 4 lettres distincts peut-on créer ?

Définition

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $1 \leq$ n et $p \in \mathbb{N}^*$ Tels que 1$\leq$ p $\leq$ n
Tout élément$(x_1;x_2;...;x_p)$ de E^p Tels que les éléments $x_1;x_2;...;x_p$ sont deux à deux distincts; s'appelle une arrangement sans répétition de p éléments de E .

Propriété

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$ Tels que 1$\leq$ p $\leq$ n
Le nombre d'arrangements sans répétition (sans remise) de p éléments de E est le nombre A_n^p donné par : A_n^p= n(n-1)(n-2)...(n-p+1)

Exemple

Dans un tournoi il y'a 10 participants Déterminer le nombre de classements des 3 premiers places (on suppose que 2 coueurs ne peuvent pas prendre le même classement).

Remarque

Le nombre d'applications injectives d'un ensemble de p éléments Dans un ensemble à n éléments est A_n^p

Application

Une contient 4 boules blanches et 3 boules noires.
On tire successivement sans remise 3 boules de l'une
1. Quel est le nombre de possibilités ?
2. Quel est le nombre de possibilités contenant 3 boules de même couleur ?

3 Les permutations

a Permutation sans répétition

Définition

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$
On appelle Permutation de E toute bijection de E dans E
Autrement dit une Permutation est un arrangement sans répétition de tous les éléments de E.

Propriété

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$
le nombre de permutations des éléments de E est le nombre noté n ! se lit " factoriel n " est défini par : n !=A_n^n=n(n-1)(n-2)...Œ2Œ1

Exemple

De combien de façon pouvez-vous ranger 7 élèves dans une table de 7 chaises ?

Remarque

1. 0 !=1 et A_n^0=1
2. Pour tout (n ;p) $\in \mathbb{N}^2$ Tels que 1$\leq$ p $\leq$ n on a : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
En particulier :$A_n^1 = n$ et $A_n^n = n!$

Exemple

Quel est le nombre de mots de 3 lettres (avec un sens ou non) du mot " AID " qu'on peut former ?

b Permutation avec répétition

Propriété

Soit E un ensemble de cardinal K et $n_1; n_2; \ldots; n_K$ des entiers naturels tels que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$
Le nombre de permutations de n éléments avec répétition est égal à : $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

Remarque

Une anagramme est un mot (ayant un sens ou non) obtenu en permettant les lettres d'un mot au départ

Exemple

Combien d'anagramme peut-on former avec les lettres du mot "ELEVE"

Exemple

Les $\frac{5!}{2!1!2!}$ permutations des 5 éléments a ;a ;b ;c ;c

4 Les combinaisons

Activité

Soit $\omega = a; b; c; d; e;$ un ensemble
Quel est le nombre de sous-ensemble à 2 éléments ?

Définition

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal 1 $\leq$ n et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que p $\leq$ n.
Une combinaison de p éléments pris parmi les n éléments de E est une partie (sous-ensemble) dont le cardinal est p.

Propriété

Le nombre de combinaison de p éléments pris parmi les n éléments distincts est le nombre que l'on note par $\mathscr{C}_n^p$ et on écrit : $\mathscr{C}_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Remarque

1. $\mathscr{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
2. $\mathscr{C}_n^0 = 1$; $\mathscr{C}_n^1 = n$ et $\mathscr{C}_n^n = 1$

EXEMPLES

Pour chaque sous-ensemble de p éléments de E, il y a p ! façons d'ordonner ses p éléments . Il s'agit en effet du nombre de permutations sans répétitions d'un ensemble de p éléments.
Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments de E est donc égale au nombre de sous-ensemble de p éléments de E multiplié par p ! Càd $A_n^p = \mathscr{C}_n^p p!$ Alors $\mathscr{C}_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Exemple

Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7 on tire 2 boules se l'urne simultanément.
Déterminer le nombre de possibilités de situations suivantes :
M " obtenir deux boules "
A " La somme des numéros obtenus est pair"
B " La somme des numéros obtenus est impairs"

5 L'ordre des éléments au dénombrement

Le nombre de l'ordre p_n est donnée par :
$p_n = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_p!}$ où $n_1, n_2, ..., n_p = n$
n : le nombre de boule tiré
$n_1; n_2$: le nombre de boules tiré de chaque couleur (Type)

Exemple

Une urne contient 5 boules vertes ; 3 boules noires et 7 boules rouges.
On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne
1. Quel est le nombre de possibilités ?
2. Déterminer le nombre de possibilités des situations suivantes :
A " obtenir une boule de chaque couleur "
B " Obtenir au moins une boule noire "
C " Obtenir une boule verte et deux boules rouges"
D "Obtenir exactement une boule rouge "

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p \leq n$ on a les propriétés suivantes :
1. La symétrie : $\mathscr{C}^{p_n} = \mathscr{C}_n^{n-p}$
2. Formule de Pascal : $\mathscr{C}^{p-1}n + \mathscr{C}_n^p = \mathscr{C}^p n + 1$

Exemples

1. On a $\mathscr{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ alors $\mathscr{C}_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!}$
$= \frac{n!}{(n-p)!p!} = \mathscr{C}_n^p$

2.On a $\mathscr{C}^{p-1}n + \mathscr{C}_n^p = \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!p}{p!(n+1-p)!} + \frac{n!(n+1-p)}{p!(n+1-p)!} = \frac{n!(p+n+1-p}{p!(n+1-p)!} = \frac{(n+1)n!}{p!(n+1-p)!} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} = \mathscr{C}_{n+1}^p$

Remarque

La formule $\mathscr{C}_n^{p-1} + \mathscr{C}_n^p = \mathscr{C}_{n+1}^p$ permet de calculer les nombres $\mathscr{C}_k^q$ tel que $0 \leq q \leq k$ en utilisant un tableau est appelé **Triangle de Pascal**.

$k \backslash q$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Formule de Pascal

$$\binom{k}{q} + \binom{k}{q+1} = \binom{k+1}{q+1}$$

Exemple

1. $\mathscr{C}_3^2 = \mathscr{C}_2^1 + \mathscr{C}_2^2 = 2+1 = 3$
2. $\mathscr{C}_5^3 = \mathscr{C}_4^2 + \mathscr{C}_4^3 = 6+4 = 10$

6 Formule du binome de Newton

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$(a+b)^n = \mathscr{C}_n^0 a^n + \mathscr{C}_n^1 a^{n-1}.b + \mathscr{C}_n^2 a^{n-2}.b^2 + \ldots + \mathscr{C}_n^{n-1} a.b^{n-1} + \mathscr{C}_n^n b^n$
Ce qui peut également être noté :
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \mathscr{C}_n^k a^{n-k} b^k$

Exemples

Par réccurence montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \mathscr{C}_n^k a^{n-k} b^k$.

☐ Pour $n = 1$ on $(a+b)^1 = (a+b)$ et on a $\mathscr{C}_1^0 a^0 + \mathscr{C}_1^1 a^0.b = a+b$

D'où la proposition est vraie pour $n=1$

☐ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on suppose que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k a^{n-k} b^k$ et montrons que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathscr{C}_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$.
On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n.(a+b)\\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k a^{n-k} b^k\\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k a^{n-k} b^{k+1}\\
&= \mathscr{C}_n^0 a^{n+1} + \mathscr{C}_n^1 a^n b + \ldots + \mathscr{C}_n^n ab^n + \mathscr{C}_n^0 a^n b + \mathscr{C}_n^1 a^{n-1} b^2 + \ldots + \mathscr{C}_n^{n-1} ab^n + \mathscr{C}_n^n b^{n+1}\\
&= \mathscr{C}_{n+1}^0 a^{n+1} + (\mathscr{C}_n^1 + \mathscr{C}_n^0) a^n b + \ldots + (\mathscr{C}_n^n + \mathscr{C}_n^{n-1}) ab^n + \mathscr{C}_{n+1}^{n+1} b^{n+1}\\
&= \mathscr{C}_{n+1}^0 a^{n+1} + \mathscr{C}_{n+1}^1 a^n b + \ldots + \mathscr{C}_{n+1}^n ab^n + \mathscr{C}_{n+1}^{n+1} b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \mathscr{C}_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

D'où d'après le principe de réccurence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k a^{n-k} b^k$

Exemple

1 On a $(a+b)^3 = \mathscr{C}_3^0 a^3 + \mathscr{C}_3^1 a^2 b + \mathscr{C}_3^2 ab^2 + \mathscr{C}_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$
On peut aussi utiliser le Triangle de Pascal pour calculer les coefficients :

2

n=0 :	1					
n=1 :	1	1				
n=2 :	1	2	1			
n=3 :	1	3	3	1		
n=4 :	1	4	6	4	1	
n=5 :	1	5	10	10	5	1

D'où :$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

Remarque

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on a : $(a-b)^n = (a+(-b)^n) = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k a^{n-k} (-b)^k = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k (-1)^k a^{n-k} (b)^k$

• Exemple

Développer $(a-b)^5$ et $(a-b)^3$

■ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

réponse :