

VECTEURS DE L'ESPACE

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• On présentera la notion de vecteur et le calcul vectoriel de la même manière que celle utilisée dans le plan. • On se limitera à l'interprétation géométrique de l'alignement et de la coplanarité.	• Maîtriser les règles du calcul vectoriel dans l'espace. • Reconnaître et exprimer la colinéarité de deux vecteurs. • Reconnaître et exprimer la coplanarité de trois vecteurs. • Appliquer l'alignement et la coplanarité pour résoudre des problèmes géométriques.
Les prés-requis	Les extensions
- Théorème de Thalès et Théorème de Pythagore. - Calcul Vectoriel et Projection. - Géométrie dans le plan et l'espace. - Produit scalaire. - Ordre et opérations	- Produit scalaire, produit vectoriel et applications. - Produit vectoriel dans l'espace. - Géométrie dans l'espace - Produit vectoriel dans l'espace.



Vecteurs de l'espace

1 Prolongement de la notion d'un vecteur dans le plan à l'espace

a notion de vecteur dans l'espace ($\mathcal{E}$)

Définition

dans le plan un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

Direction de $\overrightarrow{AB}$: c'est la droite (AB).

Sens de $\overrightarrow{AB}$: c'est le sens de A vers B.

la norme de $\overrightarrow{AB}$ (ou la longueur de $\overrightarrow{AB}$) est la distance AB on note : $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$. Cette notion sera prolongée à l'espace ($\mathcal{E}$) et ainsi toutes les propriétés des vecteurs dans le plan sont valables dans chaque plan de l'espace ($\mathcal{E}$).

• Exemple

- I est le milieu de [AB] est équivalent à $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

- Soient A et B et C trois points non alignés de l'espace ($\mathcal{E}$) donc A et B et C détermine un plan et un seul noté (ABC). - Dans le plan (ABC), on considère le triangle non aplati EFG ; I et J sont respectivement les milieux de [EF] et [EG] donc on peut déduire que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$ et aussi les droites (IJ) $\parallel$ (FG).

Remarque

Le cas $A = B$ le vecteur $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (le vecteur nul) n'a pas de direction et de sens et sa norme est nulle. On dit que deux vecteurs sont égaux si ils ont des directions parallèles et même sens et même norme. Un quadrilatère ABCD dans l'espace ($\mathcal{E}$) est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2 Calculs vectoriels dans l'espace

Remarque

La somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel sont définis de la même manière que dans la géométrie plane et on a les mêmes propriétés.

• Exemple

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

Relation de Chasles $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in (\mathcal{E}) : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$

L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction et même norme mais sens opposé du sens $\vec{u}$ et on note $-\vec{u}$.

Le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$:

- $\vec{v} = k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$.

- $\vec{v} = k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$. $\vec{v} = k\vec{u}$ a le sens opposé que $\vec{u}$ si $k < 0$.

- La norme de $\vec{v} = k\vec{u}$ vérifie $\|\vec{v}\| = |k|\|\vec{u}\|$. Pour tout vecteur $\vec{u}$ on pose $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$ on a $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace $(\mathcal{E})$ et pour tous réels k et k' on a :

- 1 $(k + k') \cdot \vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}.$
- 2 $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}.$
- 3 $k(k' \cdot \vec{u}) = k'(k\vec{u}) = (k \times k') \vec{u}.$
- 4 $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$
- 5 $k \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (k = 0 \text{ et } \vec{u} = \vec{0}).$

Colinéarité de deux vecteurs - définition vectoriel d'une droite dans l'espace



(E).

1 Colinéarité de deux vecteurs - Colinéarité de trois points :

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un α de $\mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha \vec{u}$. (c.à.d. l'un des deux vecteurs s'écrit en fonction de l'autre).

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace. $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{CD}$ sont colinéaires si et seulement si $(AB) \parallel (CD)$. - A et B et C trois points de l'espace (E) sont alignés si et seulement si $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$ sont colinéaires.

92. Définition vectoriel d'une droite dans l'espace (E) :

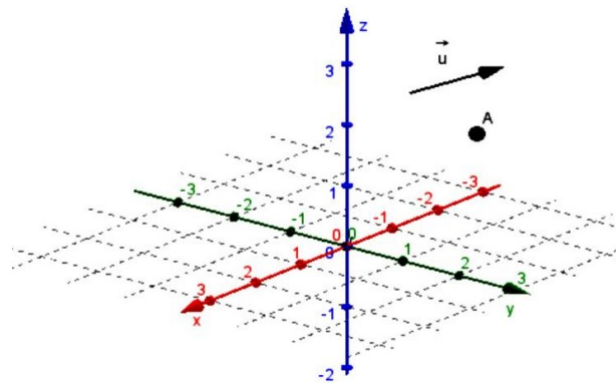
Définition (Autre définition)

Soient A et B deux points distincts de l'espace (E). Tout vecteur non nul de l'espace (E) colinéaire avec le vecteur $\vec{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (AB). L'ensemble des points M de l'espace (E) qui vérifient $\vec{AM} = \alpha \vec{u}$ tel que α de $\mathbb{R}$ est la droite (D) qui passe par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on note $D(A, \vec{u})$

$$\text{d'où : } D(A, \vec{u}) = \{M \in (E) / \vec{AM} = \alpha \vec{u}; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

• Exemple

Soit A un point et $\vec{u}$ est un vecteur non nul de l'espace (E) (voir figure ci contre). Construire la droite $D(A, \vec{u})$.



Vecteurs coplanaires - détermination vectoriel d'un plan dans l'espace

1

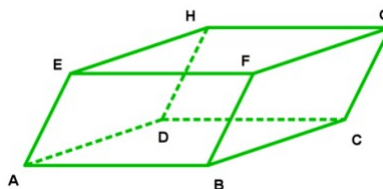
Vecteurs coplanaires

Définition (Autre définition)

Quatre points A et B et C et D de l'espace ($\mathcal{E}$) sont coplanaires si et seulement si les quatre points appartiennent au même plan. Trois vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace ($\mathcal{E}$) sont coplanaires si et seulement s'il existe quatre points A et B et C et D coplanaires tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

• Exemple

ABCDEFGH est parallélépipède trouver 3 vecteurs coplanaires puis 3 vecteurs non coplanaires.



Correction : - On considère les vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$. On a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$ et on sait que les points D et C et G et H sont coplanaires d'où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. - les vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires.

Remarque

- Si parmi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs sont colinéaires alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. - Si trois vecteurs sont constitués par cinq points on ne peut pas confirmer que les cinq points sont coplanaires. Exemple $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ sont coplanaires car $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ sont colinéaires mais les points A et B et D et E et F sont non coplanaires car le point D n'appartient pas au plan déterminé par A et B et E et F .

IV

Détermination vectoriel d'un plan dans espace

Définition (Autre définition)

- Tout plan de espace ($\mathcal{E}$) est déterminé par un point donné de l'espace ($\mathcal{E}$) et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non coplanaires de (E). - Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont appelés vecteurs directeurs du plan, ce plan sera noté $(P) = P(A, \vec{u}, \vec{v})$. - L'ensemble des points M de l'espace ($\mathcal{E}$) qui vérifient $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ tel que x et y de $\mathbb{R}$ est le plan] (P) qui passe par le point A et orienter par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on note $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ - d'ou : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in (\mathcal{E}) / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}; x \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.

Remarque

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de espace ($\vec{F}$). - $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si l'un des trois vecteurs s'écrit en fonction des deux autres. - $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\exists x, y \in \mathbb{R} / \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Exemple

$\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}$ ($\overrightarrow{AB}$ s'écrit en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$) $\star \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BD}$ ($\overrightarrow{BC}$ s'écrit en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}$) - Le vecteur nul est coplanaire avec deux autres vecteurs de espace ($\mathcal{E}$).

Exercice

On considère les points les points A et B et C et D et E de l'espace ($\mathcal{E}$) tel que : (1) : $2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} - 5\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$. 1. Montrer que : les points A et B et C et D sont coplanaires.

correction

$$\text{On a : (1)} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} - 5\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA} + 4(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) - 5(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$$

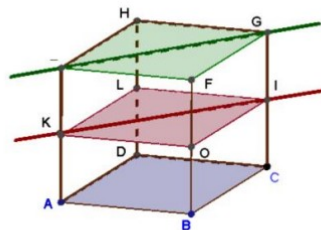
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$$

D'où : $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$ donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est écrit en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc les vecteurs : $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. D'où : les points A et B et C et D sont coplanaires.

Conclusion : les points A et B et C et D sont coplanaires .

V**Parallélisme dans l'espace :****1****Parallélisme des droites dans l'espace ($\mathcal{E}$)****Définition**

$D(A, \vec{u})$ et $\Delta(B, \vec{v})$ sont deux droites de l'espace ($\mathcal{E}$). $\Delta(B, \vec{v}) \parallel D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires})$ ou encore $\Delta(B, \vec{v}) \parallel D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha \vec{u}; \alpha \in \mathbb{R}^*$.

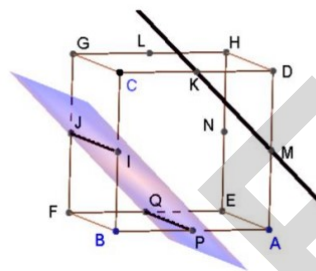
Exemple

2 Parallélisme d'une droite et d'un plan de l'espace ($\mathcal{E}$)

Définition

$D(A, \vec{u})$ et $P(B, \vec{v}, \vec{w})$ sont une droite et un plan de l'espace ($\mathbb{E}$). la droite $D(A, \vec{u})$ est parallèle au plan $P(B, \vec{v}, \vec{w})$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ou encore $D(A, \vec{u}) \parallel P(B, \vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} / x, y \in \mathbb{R}$.

Exemple



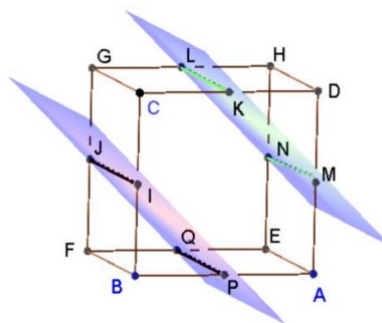
3 Parallélisme de deux plans dans l'espace ($\nparallel$)

Définition

$P(B, \vec{v}, \vec{w})$ et $Q(B, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ sont deux plans parallèles dans l'espace ($\vec{E}$) si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ sont coplanaires ou encore.

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) \parallel Q(B, \vec{u}_1, \vec{v}_1) \Leftrightarrow (\vec{u}_1 = x\vec{v} + y\vec{w} / x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{u}_2 = x'\vec{v} + y'\vec{w} / x', y' \in \mathbb{R})$$

Exemple



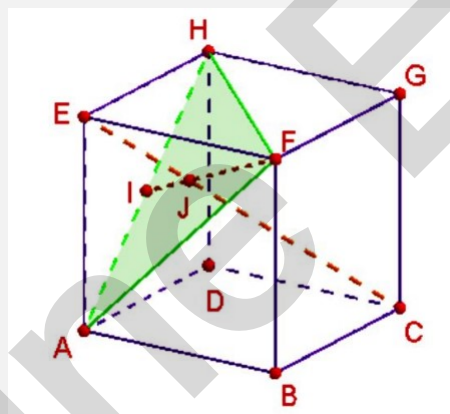
Exercice

On considère un cube ABCDEFGH, tel que I est le milieu de [AH] et J est un point de [FI] tel que : $\vec{FJ} = \frac{2}{3}\vec{FI}$.

- 1 Construire la figure .
- 2 Montrer que : $\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$.
- 3 Montrer que : $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$.
- 4 Que peut-on conclure pour les points E et J et C. Correction :

correction :

On construit une figure :



2. Montrons que : $\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$: On a :

$$\begin{aligned}\vec{EC} &= \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BC} \\ &= -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}; (\vec{BC} = \vec{AD})\end{aligned}$$

Conclusion : $\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$.

3. Montrons que : $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$: On a :

$$\begin{aligned}
\vec{EJ} &= \vec{EF} + \vec{FJ} \\
&= \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{FI} \\
&= \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{FE} + \vec{EA} + \vec{AI}) \\
&= \vec{AB} + \frac{2}{3}\left(\vec{FE} + \vec{EA} + \frac{1}{2}\vec{AH}\right) \\
&= \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{AE} + \vec{EH}) \\
&= \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{FE} + \frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{EH} \\
&= \vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{AD} \quad (\vec{FE} = \vec{AB}; \vec{EH} = \vec{AD}) \\
&= \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{AD} \\
&= \frac{1}{3}(\vec{AB} - \vec{AE} + \vec{AD}) \\
&= \frac{1}{3}\vec{EC}; (\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD})
\end{aligned}$$

Conclusion : $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$.

4. Dédution pour les points **E** et **J** et **C** : Puisque $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$ donc les vecteurs $\vec{EJ}$ et $\vec{EC}$ sont colinéaires par suite les points E et J et C sont colinéaires. Conclusion : les points **E** et **J** et **C** sont colinéaires.