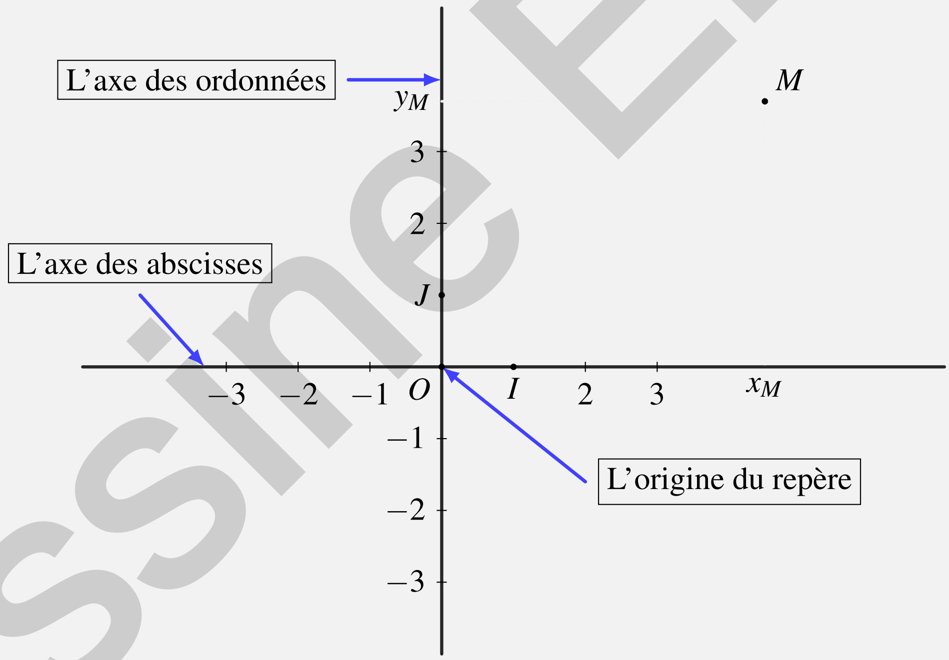
Chapitre

Le repère dans le plan

I Les coordonnées d'un point

1 Repère orthonormé du plan

Soient O, I et J trois points du plan tel que $(OI) \perp (OJ)$ et $Oi = Oj = 1$
☆ Le repère $(O;I;J)$ s'appelle repère orthonormé
On dit que le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ;I ;J)
☆ Le point O est appelé l'origine du repère
☆ La droite (OI) est appelée l'axe des abscisses
☆ La droite (OJ) est appelée l'axe des ordonnées



2 Les coordonnées d'un point

Définition

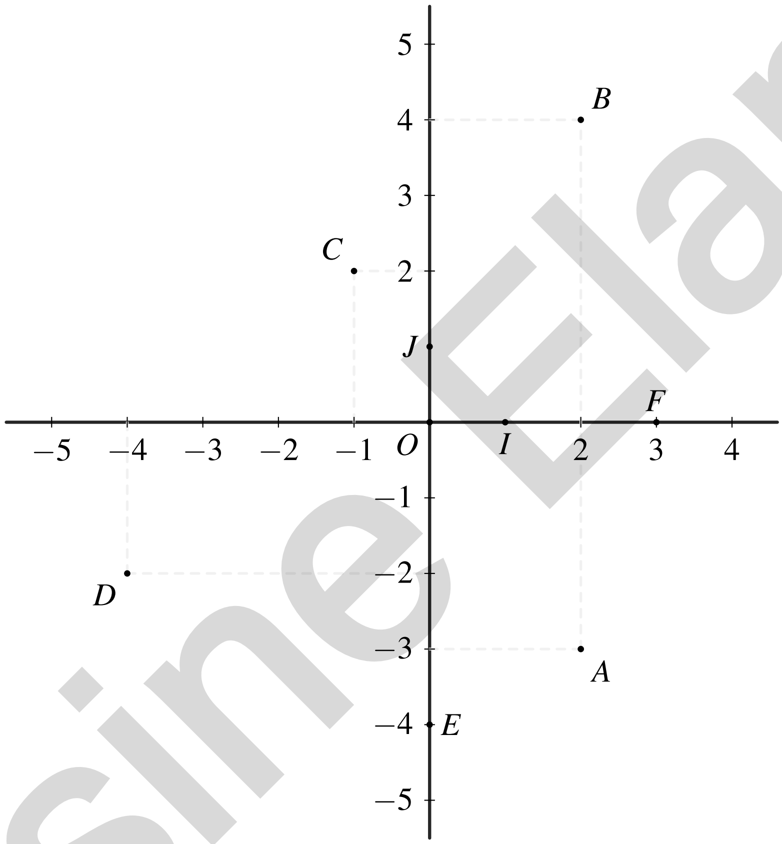
Dans un plan rapporté à un repère orthonormé , pour tout point M, il existe un couple unique de nombre réels $(x_M;y_M)$ appelé couple de coordonnées du point M
✪ x_M est appelé l'abscisse de M
✪ y_M est appelé l'ordonnée de M
Et on écrit : $M(x_M;y_M)$

• Exemple

Le plan est rapporté à un repère orthonormé
Placer les points : $A\,(2;-3)$, $B\,(2;4)$, $C\,(-1;2)$, $D\,(-4;-2)$, $E\,(0;-4)$ et $F\,(3;0)$

Solution

Plaçons les points A, B, C, D, E et F dans un repère orthonormé



★ Si $(O;I;J)$ est un repère orthonormé , donc $O\,(0;0)$, $I\,(1;0)$ et $J\,(0;1)$
★ Si M est un point de l'axe des abscisses, donc $y_M = 0$ et on écrit : $M\,(x_M;0)$
★ Si M est un point de l'axe des ordonnées, donc $x_M = 0$ et on écrit : $M\,(0;y_M)$

3 Les coordonnées du milieu d'un segment

Définition

Soit $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ deux points du plan

Si M est le milieu du segment $[AB]$, alors $x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2}$

Et on écrit $\overrightarrow{M}\begin{pmatrix}\dfrac{x_A+x_B}{2}\\\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$

• Exemple

Soient $\vec{A}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées du point E milieu du segment $[AB]$

Solution

On a $x_E = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Et $y_E = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{6-8}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Donc $\vec{E}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Application

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé , on considère les points $\vec{A}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{B}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{C}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{D}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

1. Déterminer les coordonnées du point E milieu du segment $[AC]$
2. Déterminer x et y sachant que E est le milieu du segment $[BD]$

Solution

Soient $\vec{A}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{B}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{C}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{D}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

1. Déterminons les coordonnées du point E

   E est milieu du segment $[AC]$ donc $\vec{E}\begin{pmatrix}\dfrac{-2+3}{2}\\[2ex]\dfrac{1-2}{2}\end{pmatrix}$

   Alors $\vec{E}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\[2ex]\dfrac{-1}{2}\end{pmatrix}$

2. Déterminons x et y

   E est milieu du segment $[BD]$ donc $x_E = \dfrac{x_B + x_D}{2}$ et $y_E = \dfrac{y_B + y_D}{2}$

   C'est à dire $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2+x}{2}$ et $\dfrac{-1}{2} = \dfrac{2+y}{2}$

   Donc $1 = 2 + x$ et $-1 = 2 + y$

   D'ou $x = -1$ et $y = -3$

   Alors $\vec{D}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

II Les coordonnées d'un vecteur

1 Les coordonnées d'un vecteur

Définition

Dans un repère orthonormé (O ;I ;J) , soient les points $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$

Et on écrit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$

• Exemple

Soient les points $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{C}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Solution

1. ✳ Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\-4-3\end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix}$

✳ Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-2\\2-3\end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

2. Déterminons les coordonnées du point E

On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E - x_A\\y_E - y_A\end{pmatrix}$, c'est à dire $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E - 2\\y_E - 3\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ donc $x_E - 2 = 1$ et $y_E - 3 = 1$

D'ou $x_E = 1 + 2 = 3$ et $y_E = 1 + 3 = 4$

Alors $\overrightarrow{E}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

2 Égalité de deux vecteurs

Proposition

Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $x = x'$ et $y = y'$

C'est à dire que deux vecteurs sont égaux, si leurs coordonnées sont égaux

• Exemple

Soient $\vec{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{B}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{D}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

Solution

Comparons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

On a $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \end{cases}$

donc $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} \end{cases}$

D'où $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Application

On considère les points $\vec{A}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{B}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\vec{C}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Déterminer le couple des coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme

Solution

Déterminons les coordonnées du point D

$ABCD$ est un parallélogramme ,
signifie que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

C'est à dire que : $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$

Donc $\begin{cases} 4-2 = -6 - x_D \\ -1+2 = -2 - y_D \end{cases}$

Donc $\begin{cases} 2 = -6 - x_D \\ 1 = -2 - y_D \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_D = -6-2 = -8 \\ y_D = -2-1 = -3 \end{cases}$

Alors $\vec{D}\begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix}$

3 Les coordonnées de la somme (la différence) de deux vecteurs

Proposition

Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs

On a $\begin{cases} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix} \end{cases}$

• Exemple

Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ deux vecteurs

Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

Solution

✳ Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3+2 \\ -1-4 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

✳ Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

On a $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3-2 \\ -1+4 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Application

On considère les points $\vec{A}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{B}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{C}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{D}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{M}\begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix}$

1. Déterminer x et y sachant que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
2. Montrer que $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Solution

1. Déterminons x et y

   On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 5+1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

   Et on a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -3-2 \\ 7+1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

   D'ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1-5 \\ 6+8 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix}$

   Et on a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ signifie que : $\begin{cases} x-2=-4 \\ y+1=14 \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} x=-4+2=-2 \\ y=14-1=13 \end{cases}$

Alors $\vec{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 13 \end{pmatrix}$

2 Montrons que $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

On a $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} -7+3 \\ 21-7 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix}$

Et on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

4 Les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Proposition

Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur et k un nombre réel

Alors $k\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$

• Exemple

On considère le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}$ et $-4\overrightarrow{AB}$

Solution

✳ Déterminons les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}$

On a $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2\times 3 \\ 2\times -1 \end{pmatrix}$

donc $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

✳ Déterminons les coordonnées de $-4\overrightarrow{AB}$

On a $-4\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4\times 3 \\ -4\times -1 \end{pmatrix}$

donc $-4\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix}$

Application

On considère les points $\vec{A}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{B}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, et $\vec{C}\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$

Montrer que les points A, B et C sont alignés

Solution

Montrons que les points A, B et C sont alignés
Pour montrer que les points A, B et C sont alignés, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\5+1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$
Et on a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-2\\11+1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}$
On a $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$
D'ou les points A, B et C sont alignés

III La distance entre deux points

Proposition

Dans un repère orthonormé , si on a $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$
Alors $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $AB = \sqrt{x^2+y^2}$

• Exemple

Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ un vecteur, et $\overrightarrow{E}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{F}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ deux points du plan rapporté à un repère orthonormé
Calculer AB et EF

Solution

✯ Calculons AB
On a $AB = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2}$
Alors $AB = 5$
✯ Calculons EF
☆ Méthode ① Proposition 4
On a $EF = \sqrt{(0-3)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$
Alors $EF = 3\sqrt{2}$

1.Chapter 1 Le repère dans le plan

☆ Méthode ② Passage par $\overrightarrow{EF}$

On a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0-3\\-2-1\end{pmatrix}$, donc , $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$

D'ou $EF=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$

Alors $EF=3\sqrt{2}$

Application

Dans un repère orthonormé , on considère les points $\vec{A}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{B}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$, $\vec{C}\begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{D}\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}$

Montrer que $ABCD$ est un rectangle

Solution

Montrons que $ABCD$ est un rectangle

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\9-5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

Et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}11-9\\5-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, c'est à dire que $ABCD$ est un parallélogramme

☆ Montrons que ABC est un triangle rectangle en B

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}11-3\\5-9\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$

Et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}11-1\\5-5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$

Et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

On a donc $\begin{cases}AB=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\\ AC=\sqrt{10^2+0^2}=\sqrt{100+0}=\sqrt{100}\\ BC=\sqrt{8^2+(-4)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}\end{cases}$

D'ou $\begin{cases}AB^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2=20\\ AC^2=\left(\sqrt{100}\right)^2=100\\ BC^2=\left(4\sqrt{5}\right)^2=80\end{cases}$

On a $AB^2+BC^2=AC^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B

Alors $ABCD$ est un rectangle