Chapitre

Produit vectoriel dans ϑ_3

Cours 2BSX

Historique

Le produit vectoriel prend naissance avec "l'invention" des quaternions en 1843, par HAMILTON. Le mathématicien américain GIBBS simplifie cet outil et définit le produit scalaire et le produit vectoriel dans une théorie appelée l'analyse vectorielle . Parallèlement à l'américain GIBBS, le mathématicien anglais HEAVISIDE Oliver introduit l'analyse vectorielle .
En mathématiques, et plus précisément en géométrie, le produit vectoriel et une opération vectorielle effectuée dans les espaces Euclidiens orientés de dimension 3 . Le formalisme utilisé actuellement est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard Gibbs pour ses étudiants en physique.
Les travaux de Hermann Gunther Grassmann et William Rowan Hamilton sont à l'origine du produit vectoriel défini par Gibbs.

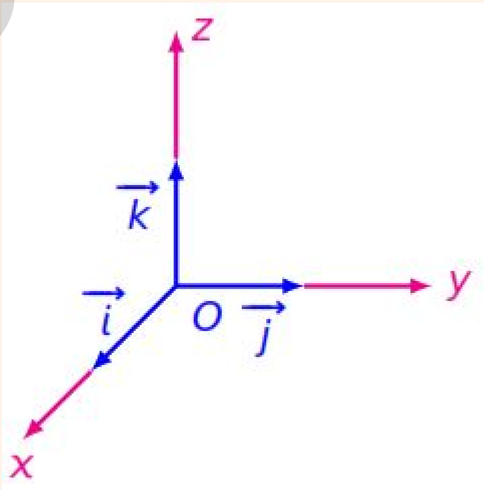
I Orientation dans lespace

1 Trièdre

D Définition

Trois demi-droites [Ox), [Oy) et [Oz) de même origine O et non coplanaires déterminant, dans cet ordre un trièdre que l'on note (Ox ; Oy ; Oz).

- [Ox), [Oy) et [Oz) sont appelées les arêtes du trièdre (Ox ; Oy ; Oz).
- Les trois plan (xOy), (xOz) et (yOz) sont appelés les faces du trièdre (Ox ; Oy ; Oz).

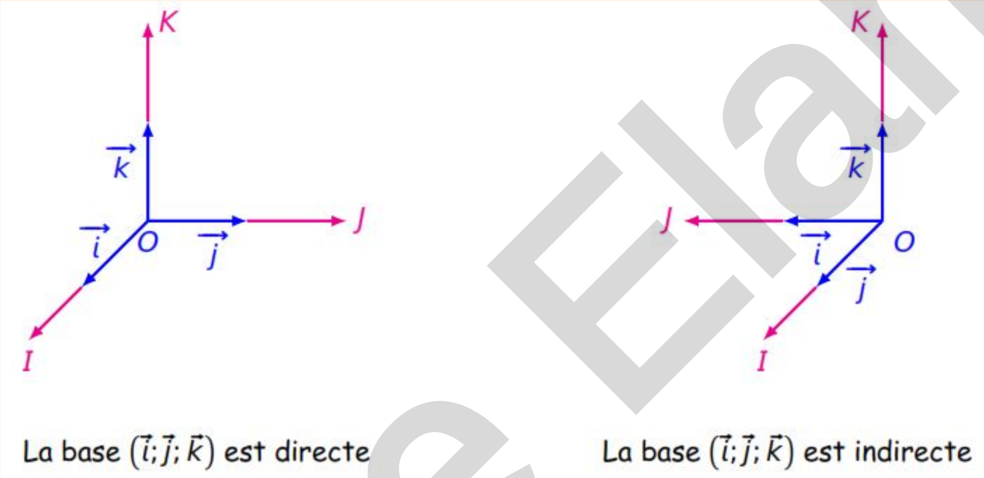


2 Règle du Bonhomme d'Ampère

D Définition

Le bonhomme d'Ampère du trièdre ([OI); [OJ); [OK)) est un personnage imaginaire porté sur l'axe [OK), ses pieds sont à l'origine et regarde [OI).

- Si [OJ) est à la gauche du bonhomme d'Ampère, alors le trièdre ([OI); [OJ); [OK)) est direct.
- Si [OJ) est à la droite du bonhomme d'Ampère, alors le trièdre ([OI); [OJ); [OK)) est indirect.



D Définition

Soit $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK}\right)$ un repère dans l'espace.

- On dit que $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK}\right)$ $\left(resp.\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK}\right)\right)$ est un repère direct (resp. une base directe) si le trièdre ([OI); [OJ); [OK)) est direct.
- On dit que $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK}\right)$ $\left(resp.\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK}\right)\right)$ est un repère indirect (resp. une base indirecte) si le trièdre ([OI); [OJ); [OK)) est indirect.

Remarque

☐ Si le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est orthogonal direct, alors :

- Les repères $\left(O;\vec{j};\vec{k};\vec{i}\right)$ et $\left(O;\vec{k};\vec{i};\vec{j}\right)$ Sont directs.
- Les repères $\left(O;\vec{j};\vec{i};\vec{k}\right)$ et $\left(O;\vec{k};\vec{j};\vec{i}\right)$ sonts indirects.

☐ L'espace ξ est orienté **positivement** lorsqu'il est muni d'un repère direct.

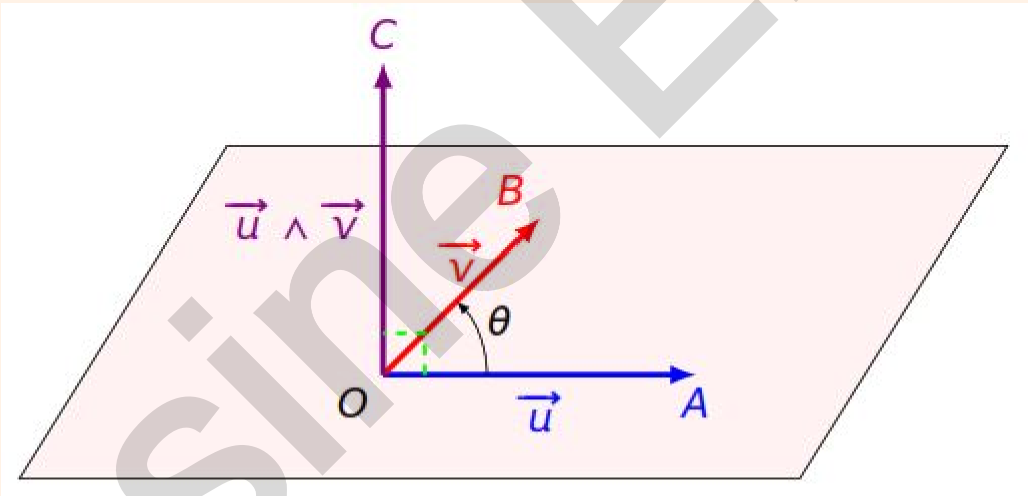
II Produit vectoriel de deux vecteurs

1 Définition du produit vectoriel

D Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.
On appelle **le produit vectoriel** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, dans cet ordre le vecteur noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ tel que :

- ☐ Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires , alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- ☐ Sinon :
  - Le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
  - Le triple $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base directe .
  - $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| . \|\overrightarrow{v}\| . \sin\theta$ où θ est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.



Remarque

- ☐ Les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace ϑ_3 **sont colinéaires** si, et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- ☐ Les points A, B et C de l'espace sont alignés si, et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

Exemple

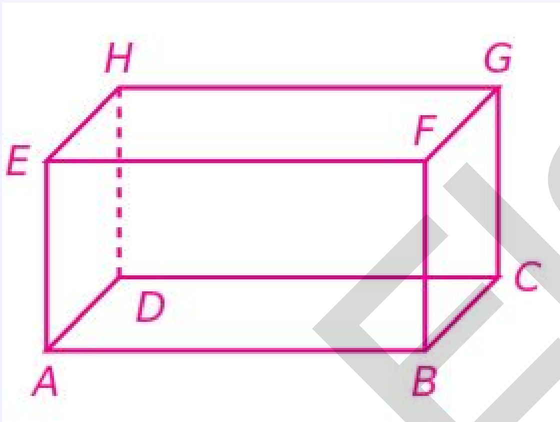
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que : $\|\overrightarrow{u}\| = 2$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 5$ et $\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = 5$.
Calculons $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$? .
implies Solution :
Soit θ la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}\right)$.

On a : $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \dfrac{1}{2}$ et $|\sin\theta| = \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin\theta| = 2\times5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

Application

On considère, ci-dessous, le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$:



1 . Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{EG} = \vec{0}$.

2 . Déterminer les vecteurs : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}$.

2 Interprétation géométrique du produit vectoriel

Propriété

Soit A, B et C trois points non-alignés de l'espace.

- La norme du produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est **l'aire du parallélogramme** formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- **L'aire du triangle** ABC est égale à : $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

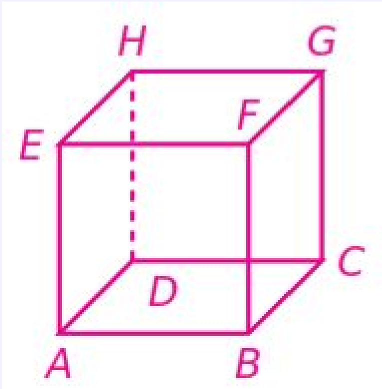
Exemple

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que : $AB = 6$ et $AD = 4$ et $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{6}$.
Notant $\mathscr{A}$ l'aire du parallélogramme $ABCD$ (en unité d'aire), on obtient :

$$\mathscr{A} = \left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\| = AB\times AD\times\sin\widehat{BAD} = 6\times4\times\frac{1}{2} = 12$$

Application

On considère, ci-dessous, le cube $ABCDEFGH$ de coté x :



1 . Déterminer les vecteurs : $\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{CA}$.

2 . Déduire, en fonction de x, l'aire du parallélogramme formé à partir des vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EF}$. Et celle du triangle ACD .

III Propriétés du produit vectoriel

1 Propriétés géométriques

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs l'espace, et α un réel.

- **Antisymétrie :** $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=-(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u})$
- **Bilinéarité :**
  - $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})+(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})\wedge\overrightarrow{u}=(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u})+(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u})$
  - $(\alpha\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\wedge(\alpha\overrightarrow{v})=\alpha(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$

Exemple

Soit O, A, B et C des points de l'espace orienté (ξ).
Montrons que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}$.

On a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\wedge(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OB}\wedge(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})-\overrightarrow{OA}\wedge(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\wedge(\overrightarrow{-OA})-\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\wedge(\overrightarrow{-OA})\\&=\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OA}\\&=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{0}$

2 Propriétés analytiques

Propriété

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe de l'espace $(\xi_{/3})$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{u}(x',y',z')$ de $(\xi_{/3})$.

  On a : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}=(yz'-zy')\vec{i}-(xz'-zx')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$
- Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $(yz'-zy';xz'-zx';xy'-yx')$

• Preuve

On a : $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}+z'\,\vec{k}$. En tenant compte du fait que $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe , il en résulte de la bilinéarité du produit vectoriel :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\wedge\vec{v} &= \left(\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}\right)\wedge x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}+z'\,\vec{k} \\
&= xx'\left(\vec{i}\wedge\vec{i}\right)+xy'\left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right)+xz'\left(\vec{i}\wedge\vec{k}\right)+yx'\left(\vec{j}\wedge\vec{i}\right)+yy'\left(\vec{j}\wedge\vec{j}\right) \\
&\quad +yz'\left(\vec{j}\wedge\vec{k}\right)+zx'\left(\vec{k}\wedge\vec{i}\right)+zy'\left(\vec{k}\wedge\vec{j}\right)+zz'\left(\vec{k}\wedge\vec{k}\right) \\
&= xy'\left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right)+xz'\left(\vec{i}\wedge\vec{k}\right)+yx'\left(\vec{j}\wedge\vec{i}\right)+yz'\left(\vec{j}\wedge\vec{k}\right)+zx'\left(\vec{k}\wedge\vec{i}\right)+zy'\left(\vec{k}\wedge\vec{j}\right) \\
&= (yz'-y'z)\left(\vec{j}\wedge\vec{k}\right)+(zx'-xz')\left(\vec{i}\wedge\vec{k}\right)+(xy'-x'y)\left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right) \\
&= (yz'-y'z)\,\vec{i}+(zx'-xz')\,\vec{j}+(xy'-x'y)\,\vec{k}
\end{aligned}$$

par suite : $$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.
Déterminons les coordonnées du vecteur : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:
On a : $\vec{u}(1,-2,3)$ et $\vec{u}(3,1,-1)$

Alors : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{i}+10\vec{j}+7\vec{k}$

Application

Soit $A(1;2;1), B(0;-3;2)$ et $C(1;0;-1)$trois points de l'espace.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}$ et $-2\overrightarrow{BA}\wedge 3\overrightarrow{CB}$
2. Déduire l'aire du triangle ABC.

IV Applications du produit vectoriel

Dans tout ce qui suit, l'espace est minu d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

1 Équation d'un plan

Propriété

Soit A, B et C trois points non-alignés de l'espace.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).
- L'ensemble des points M (x ; y ; z) de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$ est le plan (ABC) .

• Preuve

Le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ étant normal au plan (ABC) car $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$. Il s'ensuit donc :

$$M \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0 .$$

Exemple

Soit A (1 ; 1 ; 0), B (2 ; 2 ; 3) et C (3 ; 3 ; 1) trois points de l'espace.
On a : $\overrightarrow{AB}(1;-1;3)$ et $\overrightarrow{AC}(2;2;1)$. par conséquent :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -7\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k} .$$

Soit M (x ; y ; z) un point de l'espace ξ . On a :

$$M \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0} \iff -7(x-1) + 5(y+1) + 4z = 0 .$$

Par suite, une équation cartésienne du plan (ABC) est : $7x + 5y + 4z + 12 = 0$.

Application

Soient A (4 ; 3 ; 2), B (1 ; 0 ; 1) et C (2 ; 3 ; 4) trois points de l'espace.

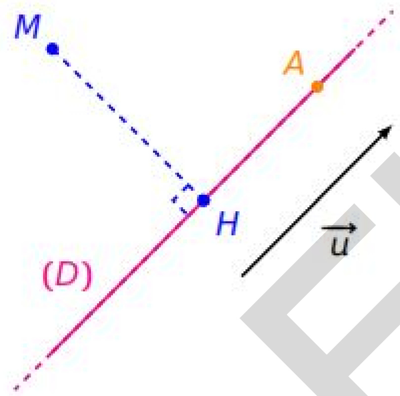
1 . Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés .
2 . Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
3 . Calculer la distance du point M(1 ; 0 ; 4) au plan (ABC) .

2 Distance dun point à une droite

Propriété

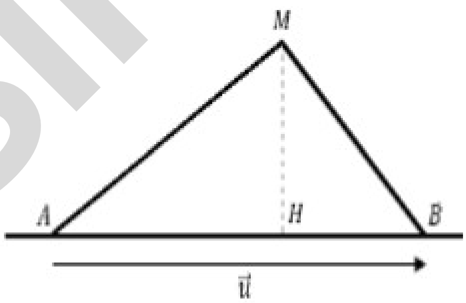
Soit (D) une droite passant par le point A de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point de l'espace. On a :

$$d(M;(D)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$



• Preuve

On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur directeur de la droite (D) .
Soit M un point de l'espace $\mathscr{E}$ et H son projeté orthogonal sur la droite (D) .



L'aire du triangle ABM est : $S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|$

et on a : $S = \frac{1}{2}AB \times MH$. Par Conséquent : $AB \times MH = \left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|$

c'est à dire : $MH = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{AB}$. Par suite : $d(M;(D)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

Exemple

Calculons la distance du point M (-1 ; 0; 1) à la droite (D) définie par :

$$(D):\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=2t \end{cases} \quad avec : t\in \mathbb{R} .$$

La droite (D) passe par le point A (1 ; 1 ; 0) et dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(2;1;2)$.

Puisque $\overrightarrow{AM}\,(2;1;1)$ et $\vec{u}\,(2;1;2)$, alors :

$$\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u} = \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{k} = 3\,\vec{i}+6\,\vec{j} .$$

On a donc : $\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\| = \sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{4+1+4}=3$

Ainsi : d (M , (D)) $=\sqrt{5}$.

Application

1 . Calculer la distance du point M (1 ; 0; 3) à la droite (D) passant par le point $A\,(0;1;3)$ et B (2 ; 4 ; 0) .

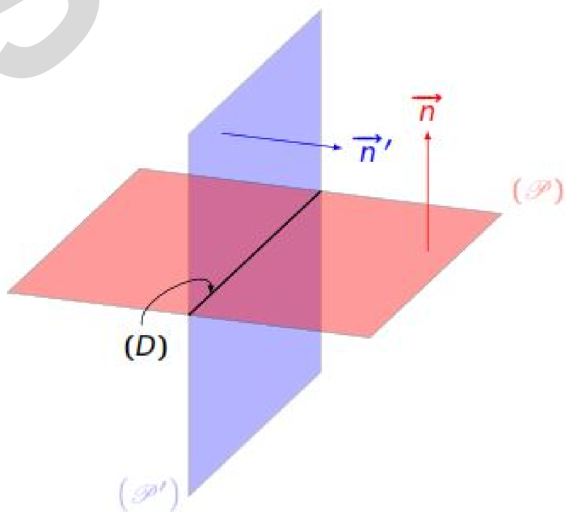
2 . Calculer la distance du point $M\,(1;0;3)$ à la droite (Δ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=-3+2t \end{cases} \quad avec : t\in \mathbb{R} .$$

3 Intersection de deux plans de l'espace

Propriété

Soient $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ deux plans sécants suivant une droit (D) dans l'espace orienté.
Si $\vec{n}$ est vecteur normal à un plan $(\mathscr{P})$ et $\vec{n}'$ est vecteur normal à un plan $(\mathscr{P}')$ **Alors** : $\vec{n}\wedge\vec{n}'$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection (D) .



Application

Étudier l'intersection des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ dans chacun des cas suivants :

1 . $(\mathscr{P}) : x-y+2z+3=0$ et $(\mathscr{P}') : x+2y+2z-1=0$.

2 . $(\mathscr{P}) : 3x-4y+5z+7=0$ et $(\mathscr{P}') : 2x-3y-z-4=0$.