Chapitre

Généralités sur les fonctions numériques

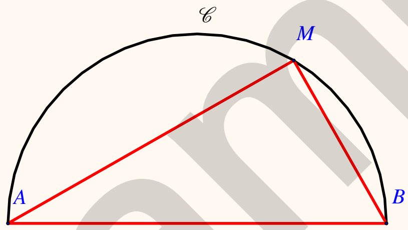
Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
- Pour approcher la notion de fonction et sa représentation graphique, on pourra utiliser, dans la mesure du possible, des logiciels qui permettent de construire les courbes de fonctions, on pourra également faire cette approche à partir de situations bien choisies de la géométrie, de la physique, de l'économie ou de la vie courante ; - Il faudra entrainer les élèves à mathématiser des situations et à résoudre des problèmes divers lors de létude des extrémums d'une fonction ; - Toutes les fonctions traitées dans ce chapitre ainsi que les fonctions cos et sin sont considérées comme fonctions de référence ; - On pourra utiliser les calculatrices scientifiques pour déterminer des images ou les calculatrices programmables pour construire des courbes(ou signaler cette possibilité aux élèves) ; - On proposera des problèmes conduisant à des équations dont la résolution algébrique savère difficile et on en déterminera graphiquement des solutions approchées.	- Reconnaitre la variable et le domaine de définition de cette variable pour une fonction définie par un tableau de données ou une courbe ou une expression ; - Déterminer graphiquement l'image d'un nombre ; - Déterminer graphiquement un nombre dont limage est connue à partir de la représentation graphique d'une fonction ; - Déduire les variations d'une fonction ou les valeurs maximales ou minimales à partir de la représentation graphique de cette fonction ; - Résoudre graphiquement des équations et des inéquations ; - Tracer la courbe d'une fonction polynôme du second degré ou d'une fonction homographique sans utiliser un changement de repère ; - Exprimer, en utilisant la notion de fonction, des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines.

I Généralités

1 Fonction numérique d'une variable réelle et son ensemble de définition

Activité

Sur la figure ci-contre, M est un point qui décrit un demi-cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre de longueur égale à 2.
On pose $AM = x$ et $BM = f(x)$



1. Ecrire la relation liant x et $f(x)$
2. a) Calculer la distance BM dans le cas où $AM = \dfrac{3}{2}$
   $f\left(\frac{3}{2}\right)$ est appelé image du nombre $\dfrac{3}{2}$ par la fonction f.
   b) Quels sont les nombres réels x qui ont une image par la fonction f ?
   L'ensemble de ces nombres est appelé ensemble de définition de la fonction f. (il est généralement noté D_f)
3. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longrightarrow \frac{1}{x} \qquad f_2 : x \longrightarrow \sqrt{x} \qquad f_3 : x \longrightarrow \sqrt{x+2}$$

$$f_4 : x \longrightarrow 3x^2+x+1 \qquad f_5 : x \longrightarrow x\sqrt{x^2-1} \qquad f_6 : x \longleftarrow \frac{\sqrt{2x+1}}{x}$$

Remarque

* La distance x varie selon la position du point M sur $\mathscr{C}$.
* La relation qui lie x au nombre $f(x)$ est appelée fonction numérique de la variable réelle x; on la note $f : x \longrightarrow f(x)$ image de x par la fonction f.

Définition

Soit $f : x \longrightarrow f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle x.

Si $f(x)$ existe (c'est-à-dire appartient à $\mathbb{R}$) , on dit que $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.

L'ensemble constitué de tous les nombres x qui ont une image par la fonction f, est appelé ensemble de définition de f et se note D_f.

Remarque

Une fonction numérique d'une variable réelle x est toute relation qui à chaque x associe au plus une image $f(x)$ (c'est-à-dire si $f(x)$ existe, alors elle est unique).

La relation $f\ :\ x \longrightarrow x^2$ à chaque réel x, elle associe son carré.

La relation $g\ :\ x \longrightarrow \sqrt{x}$ associe à x sa racine carrée.
$\sqrt{x}$ existe dans le cas où $x \geq 0$.
Les nombres réels négatifs (strictement) n'ont pas d'image par la fonction g. Ainsi : $D_g = [0, +\infty[$.

a et b étant des nombres réels, le nombre $\dfrac{a}{b}$ est définie si $b \neq 0$ et le nombre $\sqrt{a}$ est définie si $a \geq 0$.

Application

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f\ :\ x \longrightarrow \frac{\sqrt{3-x}}{x} \quad ; \quad g\ :\ x \longrightarrow \sqrt{x^2-2x-3} \quad ; \quad h\ :\ x \longrightarrow \frac{2x-1}{(x-1)\sqrt{x}}$$

2 Egalité de deux fonctions

Définition

f et g sont deux fonctions numériques, D_f et D_g leurs ensembles de définitions repectifs.
On dit que f et g sont égales et on écrit $f = g$ si : $D_f = D_g$ et $f(x) = g(x)$ pour tout x de D (où $D = D_f = D_g$)

• Exemple

* On considère les deux fonctions $f\ :\ x \longrightarrow \sqrt{x^3+x^2}$ et $g\ x \longrightarrow |x|\sqrt{x+1}$.
  * Notons que $fx) = \sqrt{x^2(x+1)}$ et $x^2 \geq 0$.
    Donc $f(x)$ et $g(x)$ sont définies si $x+1 \geq 0$, c'est-à-dire si $x \geq -1$.
    Ainsi $D = D_f = D_g = [-1; +\infty[$.
  * Soit $x \in D$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2(x+1)} \\ &= \sqrt{x^2}.\sqrt{x+1} \\ &= |x|\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = g(x)$ pour tout x de D.
D'où : $f = g$

Remarque

* $f = g$ signifieque f et g ont le même ensemble de définition D et que tout élément de D a la même image par les deux fonctions f et g.
  il est évident que si $f = g$, alors $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont confondues.
* Les deux fonctions :

$$f \;:\; x \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g \;:\; x \longrightarrow \sqrt{x}$$

  ne sont pas égales car $D_f =]0;+\infty[$ et $D_g = [0;+\infty[$
  Donc $D_f = D_g$.
  Remarquer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x > 0$, f n'est pas définie en 0 alors que g est définie en 0.

Application

Soient les fonctions $f \;:\; x \longrightarrow \sqrt{x - \frac{1}{x^2}}$ et $g \;:\; x \longrightarrow \frac{\sqrt{x^3-1}}{x}$.
Montrer que $f = g$.

3 Représentation graphique d'une fonction numérique

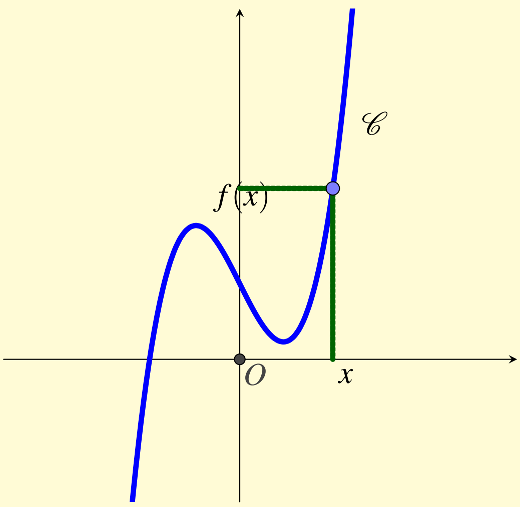
Définition

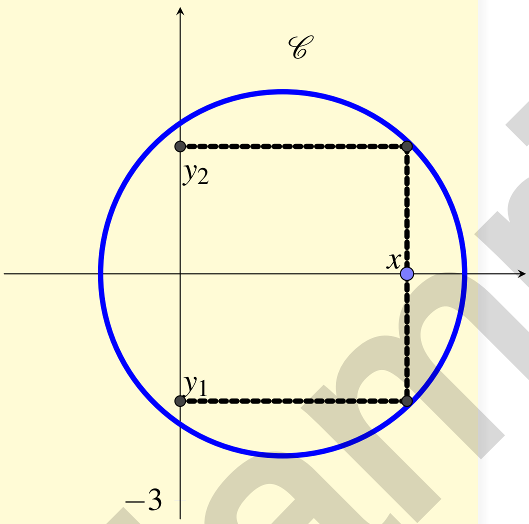
Soit f une fonction numérique définie sur D_f. Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

* La représentation graphique de la fonction f est constituée de tous les points $M(x;y)$ du plan tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$.
* La représentation graphique de la fonction f s'appelle aussi la courbe de f et se note $(\mathscr{C}_f)$; $y = f(x)$ est appelée équation de $(\mathscr{C}_f)$

Remarque

* $M(x,y) \in (\mathscr{C}_f)$ signifie que : $x \in D_f$ et $y = f(x)$
* Un cercle (C) n'est pas la courbe d'une fonction puisqu'au réel x (voir figure) sont associés deux réels distincts y_1 et y_2





• Exemple

* Soit la fonction $f\ :\ x \longrightarrow |2x-1|$. On a : $D_f = \mathbb{R}$.
On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; donc le point $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
Le point $B(2;5)$ n'appartient pas à $(\mathscr{C}_f)$ puisque $f(2) = 3$ et que $f(2) \neq 5$
Construisons la courbe $(\mathscr{C}_f)$. On a :

$$\begin{cases} f(x) = 2x-1 & \text{Si } x \geq \frac{1}{2} \\ f(x) = -2x+1 & \text{Si } x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soient $I = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $I' = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$
$(\mathscr{C}_f)$ est la réunion des représentations graphiques de f sur I et I' qui sont deux demi-droites d'origine

Application

Représenter graphiquement la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 4x+3 & \text{Si} \quad x < -2 \\ g(x) = -5 & \text{Si} \ -2 \leq x \leq 1 \\ g(x) = -2x-3 & \text{Si} \quad x > 1 \end{cases}$$

4 Fonction paire et fonction impaire

Définition

Soient f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

* Dire que f est une fonction paire signifie que : $\forall x \in D_f$: $\quad -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
* Dire que f est une fonction impaire signifie que : $\forall x \in D_f$: $\quad -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

Remarque

* $x \in D_f$ et $-x \in D_f$ signifie que D_f est symétrique par rapport à zéro.
* f est paire signifie que D_f est symétrique par rapport à 0 et que deux nombres opposés de D_f ont la même image par f
* f est impaire signifie que D_f est symétrique par rapport à 0 et que deux nombres opposés de D_f ont des images opposées

Exemple

* Soient la fonction $f \ : \ x^4 - x^2$. On a : $D = \mathbb{R}$.
  Ainsi, il est clair que si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$. Calculons $f(-x)$, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 \\ &= f(x) \quad \text{quel que soit} x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  D'où : f est une fonction paire.
* Soit la fonction $g \ : \ x \longrightarrow x^3 + x$. On a : $D_g = \mathbb{R}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \\ &= -(x^3 + x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Donc g est une fonction impaire.

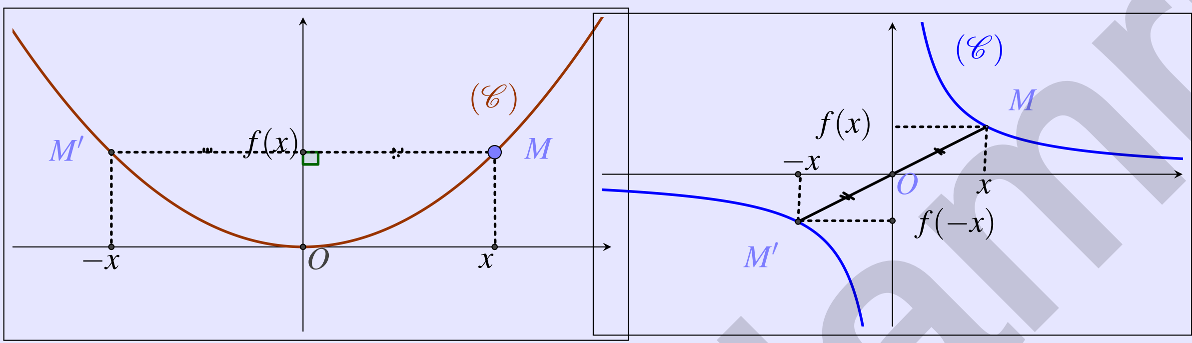
Application

Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes : $f \ : \ x \longleftarrow x\sqrt{x-1}$; $g \ : \ x \longrightarrow |x-2| - |x+2|$; $h \ : \ x \longrightarrow (x+)\sqrt{x^2-4}$

T **Théorème**

Soient f une fonction numérique et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

* f est paire signifie que $(\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
* f est impaire signifie que $(\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport au point O origine du repère.



II Variation d'une fonction

1 Sens de variation d'une fonction

Définition

Soient f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f.

* f est croissante sur I signifie que pour tous x_1 et x_2 de I :
  Si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
* f est strictement croissante sur I signifie que pour tous x_1 et x_2 de I :
  Si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$.
* f est décroissante sur I signifie que pour tous x_1 et x_2 de I :
  Si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.
* f est strictement décroissante sur I signifie que pour tous x_1 et x_2 de I :
  Si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$.

• Exemple

* La fonction $f\ :\ x \longrightarrow 3x-4$ est strictement croissante sur $I=\mathbb{R}$.
  En effet, pour tous x_1 et x_2 de $\mathbb{R}$, on a :
  Si $x_1 < x_2$, alors on a : $3x_1-4 < 3x_2-4$
  C'est-à-dire : $f(x_1) < f(x_2)$.
* La fonction $g\ :\ x \longrightarrow -\sqrt{x}$ est strictement décroissante sur $I=[0;+\infty[$.
  En effet, pour tous x_1 et x_2 de I, on a :
  Si $x_1 < x_2$, alors on a : $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$
  C'est-à-dire $-\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2}$.
  où encore $g(x_1) > g(x_2)$

Application

Montrer que la fonction $f\ :\ x \longrightarrow |4x-3|$ est strictement croissante sur $I_1 = \left[\frac{3}{4};+\infty\right[$ et strictement décroissante sur $I_2 = \left]-\infty;\frac{3}{4}\right]$.

2 Fonction Monotone

Définition

Soient f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f.

* f est monotone sur I signifie que (f est croissante sur I ou f est décroissante sur I).
* f est strictement monotone sur I signifie que :
  f est strictement croissante sur I ou f est strictement décroissante sur I).

Remarque

* Etudier la monotonie ou les variations de f sur D_f signifie déterminer les intervalles I inclus dans D_f tels que f soit monotone sur I.
* Si f est strictement monotone sur un intervalle I, alors f est monotone sur cet intervalle ; mais la réciproque est fausse.

Exemple

Soit la fonction numérique $f\ :\ x \longrightarrow |x-1|+|x|$.
Etudions la monotinie de f sur D_f. On a :

$$\begin{cases} f(x) = 2x-1 & \text{Si} \quad x \geq 1 \\ f(x) = 1 & \text{Si } 0 < x < 1 \\ f(x) = -2x-1 & \text{Si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est strictement monotone sur chacun des intervalles $I_1 = [1;+\infty[$ et $I_2 =]-\infty;0]$
2. f est-elle croissante sur $[0;+\infty[$? f est-elle décroissante sur $]-\infty;0]$?

Application

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. On considère les deux fonctions :

$$f\ :\ x \longrightarrow ax+b \quad \text{et} \quad g\ :\ x \longrightarrow ax^2$$

Montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et que g est strictement monotone sur chacun des intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$.

3 Taux de variation d'une fonction

Définition

Soient f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition, x_1 et x_2 deux éléments distincts de D_f.

Le nombre réel T tel que $T = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ est appelé taux de variation de f entre x_1 et x_2.

T **Théorème**

Soient f une fonction numérique et $T = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ son taux de variation entre deux éléments distincts x_1 et x_2 d'un intervalle I inclus dans D_f.

* Si $T \geq 0$ pour tout x_1 et x_2 de I, alors f est croissante sur I.
* Si $T > 0$ pour tout x_1 et x_2 de I, alors f est strictement croissante sur I.
* Si $T \leq 0$ pour tout x_1 et x_2 de I, alors f est décroissante sur I.
* Si $T < 0$ pour tout x_1 et x_2 de I, alors f est strictement décroissante sur I.

• Exemple

* Le taux de variation de la fonction $f : x \longrightarrow 3x - 2$ entre deux éléments distincts x_1 et x_2 de $\mathbb{R}$ est :
$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{3x_1 - 2 - 3x_2 + 2}{x_1 - x_2} = 3$$
Or, $T > 0$ Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
* Le taux de variation de la fonction $g : x \longrightarrow 5x^2$ entre deux éléments distincts x_1 et x_2 de $\mathbb{R}$ est :
$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{5x_1^2 - 5_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{5(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 5(x_1 + x_2)$$
* Soit $x_1, x_2 \in I = [0; +\infty[$, Alors $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ et par suite $x_1 + x_2 \geq 0$.
Or, $x_1 \neq x_2$ donc $x_1 + x_2 > 0$ c'est-à-dire $T > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $I = [0; +\infty[$.
* De même f est strictement décroissante sur $I' =]-\infty; 0]$.(A vérifier)

Remarque

Pour résumer les variations de f sur $\mathbb{R}$, on consigne les résultats de l'étude sur un tableau en exprimat le fait qu'une fonction est croissante par une flèche montante et le fait qu'une fonction est décroissante par une flèche descendante.
Ce tableau est appelé tableau de variation de f (voir tableau ci-dessous).

Application

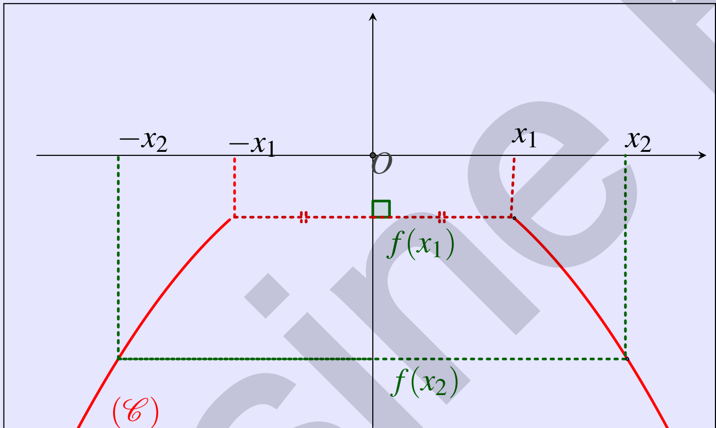
On considère la fonction $g\ :\ x \longrightarrow -\dfrac{1}{x}$.
Etudier les variations de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par deux méthodes différentes : En utilisant le taux de variation et en utilisant la définition.

4 Monotonie et parité d'une fonction

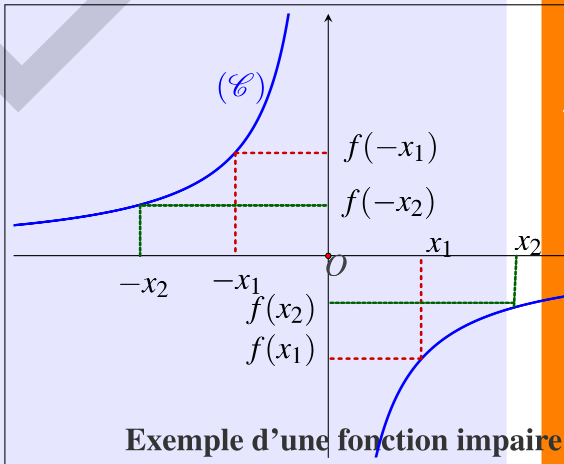
T Théorème

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, inclus dans D_f et I' le symétrique de I par rapport à 0.

* Dans le cas où f est paire, on a :
  - Si f est croissante sur I, alors f est décroissante sur I'.
  - Si f est décroissante sur I, alors f est croissante sur I'.
* Dans le cas où f est impaire, alors :
  f a le même sens de variation sur I et sur I'.



Exemple d'une fonction paire



Exemple d'une fonction impaire

5 Maximum et minimum d'une fonction

Définition

Soient f une fonction numérique. I un intervalle inclus dans D_f et $a \in I$.

* Dire que $f(a)$ est le maximum (la valeur maximale) de la fonction f sur I signifie que :

$$f(x) \leq f(a) \quad \text{pour tout } x \in I$$

* Dire que $f(a)$ est le miniimum (la valeur minimale) de la fonction f sur I signifie que :

$$f(x) \geq f(a) \quad \text{pour tout } x \in I$$

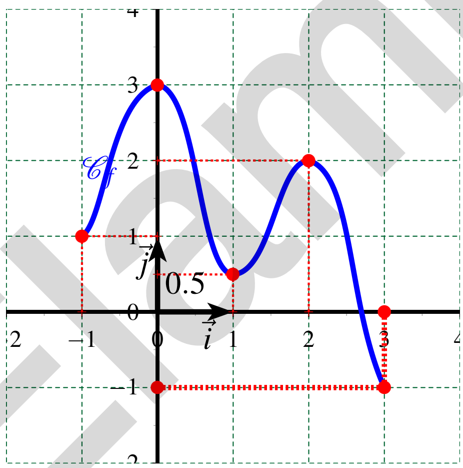
Remarque

* Le maximum d'une fonction f sur I est la plus grande valeur prise par f sur I.
* Le minimum d'une fonction f sur I est la plus petite valeur prise par f sur I.

• Exemple

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f.

* Le maximum de cette fonction f sur l'intervalle $I = [-1;3]$ est $f(0) = 3$ et son minimum sur le même intervalle est $f(3) = -1$.
* Sur l'intervalle $J = [1;2]$, le maximum de f est $f(2) = 2$ et le minimum de f est $f(1) = \dfrac{1}{2}$
* Noter que $f(x) \leq 3$ pour tout x de $I = [1;3]$.
Donc $fx) \leq 4$ pour tout x de I.
Cependant 4 n'est pas un maximum de la fonction f car il n'existe aucun réel a de I tel que $f(a) = 4$.



Application

* On considère la fonction $f : x \longrightarrow x^2 - 4x + 7$.
  1. Vérifier que : $f(x) \geq 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  2. Calculer $f(2)$, puis en déduire que 3 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
* On considère la fonction $f : x \longrightarrow x + \dfrac{1}{x}$
  1. Montrer que, pour tout x de $I =]-\infty;0[$; $f(x) \leq -2$.
  2. Montrer que -2 est le maximum de f sur I.

III Fonctions périodiques-Parabole-hyperbole :

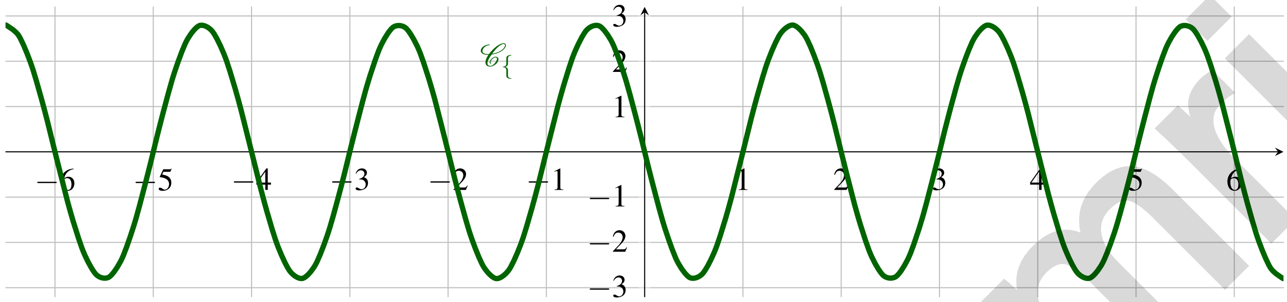
1 Fonctions périodiques- les fonctions $x \longrightarrow sin(x)$ et $x \longrightarrow cos(x)$:

Définition

Soient f une fonction numérique et D_f son domaine de définition. On dit que la fonction f est périodique s'il existe un nombre réel T strictement positif tel que :
• Pour tout $x \in D_f$, on a : $(x+T) \in D_f$.
• Pour tout $x \in D_f$, on a : $f(x+T) = f(x)$.
Le nombre réel T est appelé période de la fonction f, et la fonction f appelée T-périodique.

• Exemple

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la représentation graphique suivante :



La fonction f est de période $T = 4$

Application

On considère les deux fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$

1. Etudier la parité de chacune des deux fonctions f et g.
2. Calculer $f(x+2\pi)$ et $g(x+2\pi)$ tel que : $x \in \mathbb{R}$. Déduire.

2 Parabole-hyperbole :

a A) La fonction $x \longrightarrow ax^2$ $(x \in \mathbb{R}^*)$

Activité

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la parité de la fonction f. Que peut-on conclure ?
2. Calculer le taux de variations de la fonction f entre deux nombres réels distincts a et b
3. Etudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$
4. En déduire la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;0]$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
6. Remplir le tableau suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
f(x)				

7. Construire la courbe représentative (C_f)
8. Refaire les mêmes questions précédentes pour la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2$

Définition

Soit a un nombre réel non nul. La courbe représentative de la fonction $x \longrightarrow ax^2$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan est appelée **parabole de sommet O, et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées**.

Propriété

Soit a un nombre réel non nul. Le tableau de variations de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2$ est :

$\boxed{\text{Si } a > 0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\boxed{\text{Si } a < 0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Application

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner la nature de la courbe (C_f) en précisant ses éléments caractéristiques.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis construire(C_f)

b B) La fonction $x \longrightarrow ax^2 + bx + c$

Définition

Soient a, b et c des nombres réels et a non nul. La courbe représentative de la fonction $x \longrightarrow ax^2 + bx + c$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan est une parabole de sommet $\omega(\frac{-b}{2a}; f(\frac{-b}{2a}))$, et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$

Application

Donner le sommet et l'axe de symétrie pour chacune des courbes représentatives des fonctions définies par : $f_1 : x \longmapsto x^2 + 2x + 1$ $\quad f_2 : x \longmapsto -2x^2 + 4x + 1$ $\quad f_3 : x \longmapsto x^2 + 1$

Propriété

Soit a, b et c des nombres réels et a non nul. Le tableau de variations de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$\boxed{\text{Si } a > 0}$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\nearrow$

$\boxed{\text{Si } a < 0}$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\searrow$

Application

Dresser le tableau de variations de fonctions définies par :
$f_1 : x \longmapsto x^2 + 2x + 1$ $\quad f_2 : x \longmapsto -2x^2 + 4x + 1$ $\quad f_3 : x \longmapsto x^2 + 1$

Application

Considérons f la fonction définie sur par $f : x \longmapsto x^2 - 4x + 3$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la nature de (C_f) en précisant ses éléments caractéristiques.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Construire (C_f)
4. Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2$

C) La fonction $x \longrightarrow \frac{\alpha}{x}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$

Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

Parité de f

✓ Pour tout $x \neq 0$ on a,$-x \neq 0$ donc $-x \in IR^*$.
✓ On a $f(-x) = \frac{\alpha}{-x} = -\frac{\alpha}{x} = -f(x)$.
On déduit que f est impaire et par conséquent (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Monotonie de f

Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de $\mathbb{R}*$.
Le taux de variations de f entre x_1 et x_2 est : $T = \frac{-\alpha}{x_1x_2}$.
- Si $x_1 \in]0;+\infty[$ et $x_2 \in]0;+\infty[$, alors : $x_1x_2 > 0$.
- Si $x_1 \in]-\infty;0[$ et $x_2 \in]-\infty;0[$, alors : $x_1x_2 > 0$.

Ce qui entraine que le signe de T est le signe de $-a$.

Si $\alpha > 0$

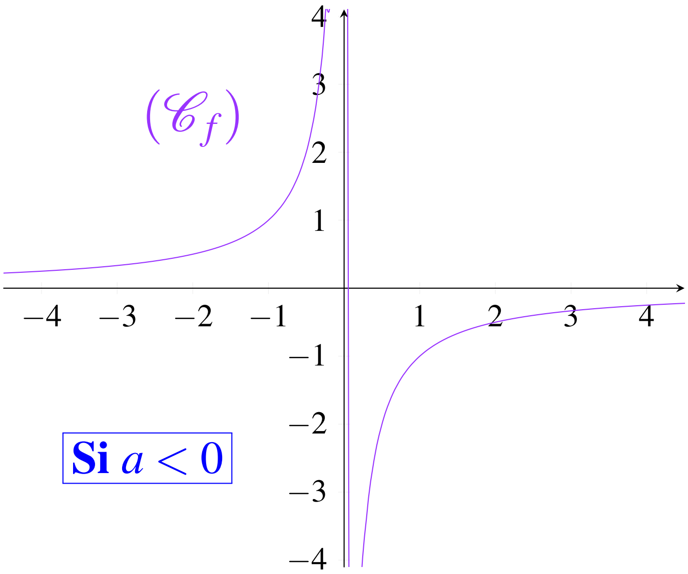
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	||	↘

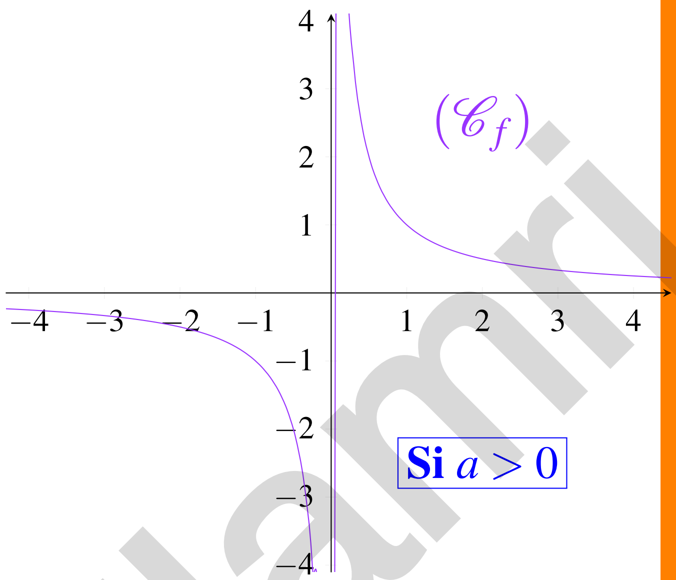
Si $\alpha < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	||	↗

La courbe représentative de f

La courbe représentative de f appelée hyperbole de centre O (Origine de repère) et d'asymptotes $x = 0$ et $y = 0$ (Axes de repère).





Application

Considérons f et g deux fonctions définies sur IR^* par $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{-2}{x}$.

1. Déterminer la nature de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé.
2. Remplir le tableau suivant :

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
f(x)						
g(x)						

3. Construire (C_f) et (Cg).

d D) La fonction harmonique $x \longrightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$

Définition

On appelle fonction **homographique** toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des réels tels que : $ad-bc\neq 0$

Propriété

Toute fonction homographique peut se mettre sous **la forme réduite** $x\longmapsto \alpha+\frac{\beta}{x-\gamma}$

Exemple

Cherchons la forme réduite de la fonction f définie par :$f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$

Pour tout x différent de 3, on a : $f(x)=\frac{2(x-3)+7}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}$

Donc $\alpha=2$, $\beta=7$ et $\gamma=3$

Application

Donner la forme réduite des fonctions homographiques suivantes :
$\bullet f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$; $\bullet g(x)=\frac{3x-1}{2x+3}$; $\bullet h(x)=\frac{2x-11}{3x+6}$

Propriété

Le tableau de variations de la fonction : $x \longmapsto \alpha+\frac{\beta}{x-\gamma}$ est :

Si $\beta>0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$	

Si $\beta<0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$	

Application

Donner le tableau de variations des fonctions homographiques suivantes :
$\bullet f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$; $\bullet g(x)=\frac{3x-1}{2x+3}$; $\bullet h(x)=\frac{2x-11}{3x+6}$

Propriété

La courbe représentative de $x \longmapsto \alpha+\frac{\beta}{x-\gamma}$ est une hyperbole de centre $\omega(\gamma;\alpha)$ et d'asymptotes $x=\gamma$ et $y=\alpha$

Application

Considérons f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ et (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la nature de (C_f).
3. Construire (C_f).
4. Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{3}{x}$