Chapitre

Calcul littéral-Développement-Factorisation

I Expression littérale

Activité

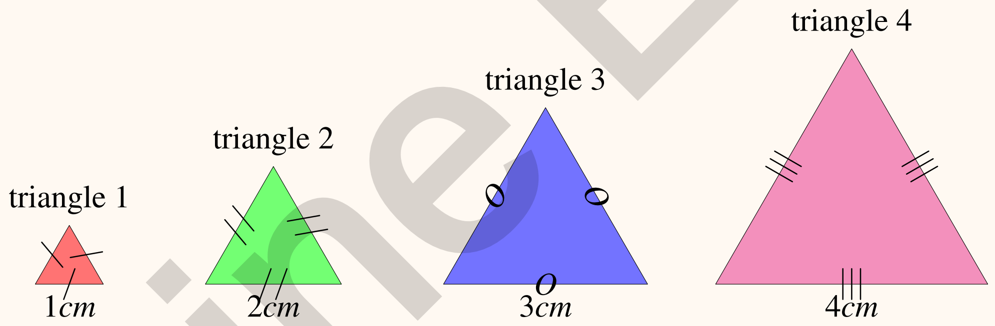
♣ ***Des chiffres et des lettres :***

La lettre n désigne un nombre entier naturel

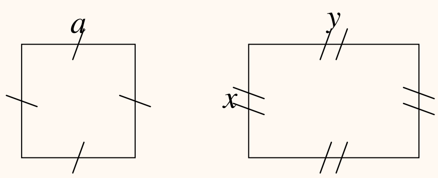
Comment s'écrit :	Calculer les expressions trouvées quand :
Le double de n ? :	$n = 3$ >> ....
Le triple de n ? :	$n = 2$ >> ....
La somme de n et 5 ? :	$n = 1$ >> ....
La somme de 12 du double de n ? :	$n = 9$ >> ....
Le quart de n ? :	$n = 16$ >> ....

♣ ***Périmètres :***

On a représenté ci-dessous quatre triangles équilatéraux de côtés 1cm, 2cm, 3cm et 4cm



Quel est le périmètre du triangle 1 ? ....
Quel est le périmètre du triangle 2 ? ....
Quel est le périmètre du triangle 3 ? ....
Quel est le périmètre du triangle 4 ? ....
En t'inspirant de ce que tu as écrit dans la question précédente, écris le périmètre en cm d'un triangle équilatéral de côté ccm ....
Quel est le périmètre du carré de côté a ? ....
Quel est le périmètre du ectangle de longueur x et de largeur y ? ....



Définition

Une expression littérale est une expression contenant une ou plusieurs lettres, ces lettres designent des nombres

• Exemple

$A = 3 \times x + 7$
$B = -5 \times (a-1)$
A et B sont des expressions littérales

Remarque

Le signe '$\times$' peut être supprimé devant une lettre ou devant une parenthèse

• Exemple

✸ L'expression : $A = 3 \times x + 7$ devient $A = 3x + 7$
✸ L'expression $B = -5 \times (a-1)$ devient $B = -5(a-1)$

Remarque

On place toujours le nombre devant la lettre

Application

1 Dans chaque cas, proposer une écriture plus simple

$A = x \times 3$;; $B = 3 \times z \times 4$;; $C = 1 \times a$
$D = 9 \times y$;; $E = b \times 3 \times c \times 7$;; $F = n \times 6 \times a$

2 Calculer la valeur de chacune de ces expressions

$A = 7y$;; $B = 4y + 3$;; $C = 3(y+2)$;; $D = 2 + 5y$

① Si $y = 0$ ② Si $y = 1$ ③ Si $y = 3$

II Réduire une expression littérale

Activité

a *Soufiane* affirme que $4 + 3x = 7x$.
Il explique cela en disant que, lorsque x est égal à 1, alors les deux membres sont égaux à 7.
Il se trompe, mais comment peut-on lui expliquer son erreur ?

b *Soufian* semble avoir compris. En tout cas, précise-t-il, on peut réduire la longueur de l'expression $4 + 3x + 6 - 7x$, ce qui donne $3x + 10 - 7x$.
Qu'en penses-tu ? Peut-on raduire davantage cette expression ?

Propriété

☆ $a \times 0 = 0$ ☆ $a \times 1 = a$ ☆ $a \times a = a^2$

☆ $a \times a \times a = a^3$ ☆ $a \times b = b \times a$

EXEMPLES

On a : $\begin{aligned} A &= 2 \times x \times 7 \\ A &= 2 \times 7 \times x \\ A &= 14 \times x \\ A &= 14x \end{aligned}$

On a : $\begin{aligned} B &= y \times 5 \\ B &= 5 \times y \\ B &= 5y \end{aligned}$

On a : $\begin{aligned} C &= b \times b \times 4 \times b \\ C &= 4 \times b \times b \times b \\ C &= 4 \times b^3 \\ C &= 4b^3 \end{aligned}$

On a : $\begin{aligned} D &= t \times t \times 6 \\ C &= 6 \times t \times t \\ C &= 6 \times t^2 \\ C &= 6t^2 \end{aligned}$

Définition (Autre définition)

Réduire une expression, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles

Règle

Pour réduire une expression littérale, on regroupe les termes de même nature (même lettres et mêmes exposants)

EXEMPLES

On a : $\begin{aligned} A &= 3x + 5x \\ A &= 5x \end{aligned}$

On a : $\begin{aligned} B &= 4y^2 - 6y^2 \\ B &= -2y^2 \end{aligned}$

On a : $\begin{aligned} C &= 8x - 5 + 2x + 15 \\ C &= 8x + 2x - 5 + 15 \\ C &= 10x + 10 \end{aligned}$

On a : $\begin{aligned} D &= -5y - 2 - 4y + 7 + y^2 \\ D &= y^2 - 5y - 4y - 2 + 7 \\ D &= y^2 - 9y + 5 \end{aligned}$

Application

Réduire les expressions suivantes

$A = 6x - 5 + 2x - 1$ $B = 3 \times x \times 5 + 2x - 1$

$C = -7x + 2 + 7x - 3 + 4x$ $D = 2x^2 - 4x + x^2 + 5 - 3x + x^2 + 1$

$E = -2y + 4x + 3y + 3 + 2x$

Solution

$A = 8x - 6$ $B = 17x - 1$

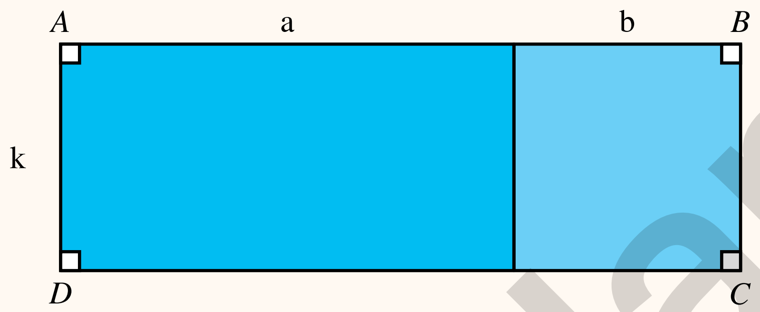
$C = 4x - 1$ $D = 4x^2 - 7x + 6$

$E = y + 6x + 3$

III Développement et factorisation

Activité

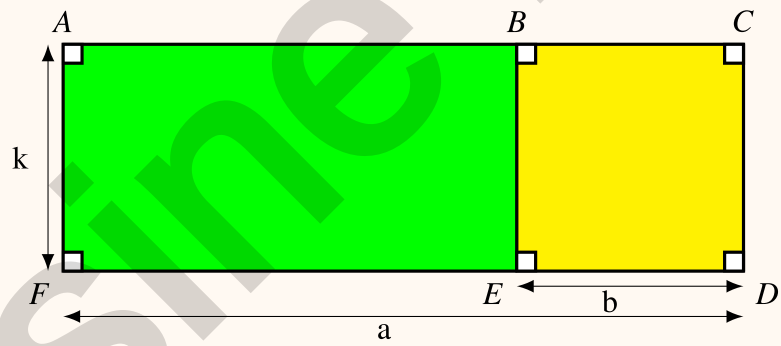
On considère la figure suivante



1. Calculer la surface du triangle $ABCD$
2. Que peut-on déduire ?

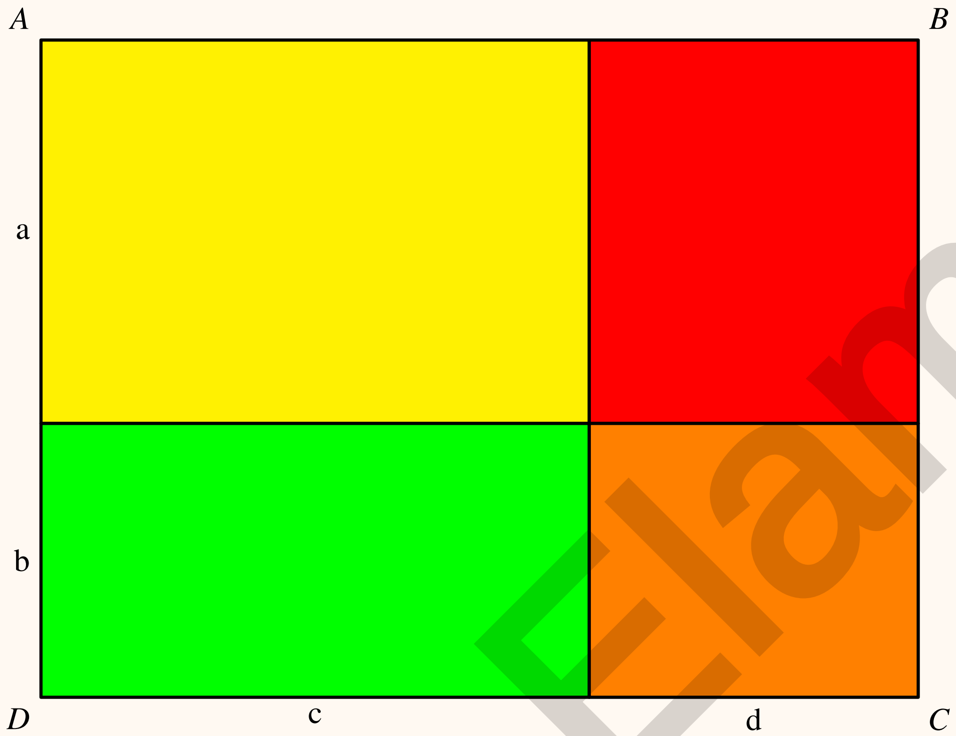
Activité

On considère la figure suivante



1. a. Calculer la surface du triangle $ACDF$
   b. Calculer l'aire du rectangle jaune $BCDE$
2. a. Calculer l'aire du rectangle vert $ABEF$ de deux façons différentes
   b. En déduire que : $k(a-b)=ka-kb$

Activité



1. Calculer l'aire du rectangle $ABCD$ de deux façons différentes
2. En déduire que : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

1 Développer une expression

Définition

Développer, c'est transformer un produit en une somme (ou une différence)

Propriété

Si a, b et k sont des nombres décimaux relatifs, alors :

$$k\times(a+b) = k\times a + k\times b \quad k\times(a-b) = k\times a - k\times b$$

EXEMPLES

Développons l'expression suivante : $A = 2\times(x+1)$

$$\begin{array}{lrcl} \text{On a :} & A & = & 2\times(x+1) \\ & A & = & 2\times x + 2\times 1 \\ \text{Donc :} & A & = & 2x+2 \end{array}$$

Développons l'expression suivante : $B = -3x\times(x-1)$

$$\begin{array}{lrcl} \text{On a :} & B & = & -3x\times(x-1) \\ & B & = & -3x\times x-(-3x)\times 1 \\ & B & = & -3x^2-(-3x) \\ \text{Donc :} & B & = & -3x^2+3x \end{array}$$

Généralisation :

Si a, b, c et k sont des nombres décimaux relatifs, alors :

$$k\times(a-b+c)=k\times a-k\times b+k\times c$$

Propriété

Soit a in nombre décimal relatif

$$\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots\cdots+a}_{n\ \text{termes}}=n.a$$

Propriété

Si a, b, c et d sont des nombres décimaux relatifs, alors

$$(a+b)(c+d)=a\times(c+d)+b\times(c+d)$$
$$(a+b)(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$$

Exemple

Développons l'expression suivante : $A=(x+1)(x-2)$

$$\begin{array}{lrcl} \text{On a :} & A & = & (x+1)(x-2) \\ & A & = & x\times x-x\times 2+1\times x-1\times 2 \\ & A & = & x^2-2x+x-2 \\ \text{Donc :} & A & = & x^2-x-2 \end{array}$$

2 Factoriser une expression

Définition

Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en un produit

Propriété

Si a, b et k sont des nombres décimaux relatifs, alors :

$$k\times a+k\times b=k\times(a+b)$$
$$k\times a-k\times b=k\times(a-b)$$

Vocabulaire :

Le nombre k est un facteur commun aux tremes ka et kb

Remarque

Avant de factoriser, on doit chercher d'abord le facteur commun

Exemples

Factorisons l'expression suivante : $A = a^2 + 4a$

$$\begin{array}{lrcl} \text{On a :} & A & = & a^2 + 4a \\ & A & = & a \times a + 4 \times a \\ \text{Donc :} & A & = & a(a+4) \end{array}$$

Factorisons l'expression suivante : $B = 15x - 25y + 5$

$$\begin{array}{lrcl} \text{On a :} & B & = & 15x - 25y + 5 \\ & B & = & 5 \times 3x - 5 \times 5y + 5 \times 1 \\ & B & = & 5(3x - 5y + 1) \\ \text{Donc :} & B & = & -3x^2 + 3x \end{array}$$

Application

1. Développer les expressions suivantes

$A = 4(1.5 + x)$ $\quad B = -2(y + 4x)$ $\quad C = 7(6 - x + 2y)$

$D = -4(x - 3y)$ $\quad E = (x - 2)(x + 4)$ $\quad F = (x + 1.5)(x - y)$

2. Factoriser les expressions suivantes

$G = 5y + 5x$ $\quad H = 36 - 6x$

$I = 44x + 55y$ $\quad J = -100x + 10y^2$

$K = (x - 1)(x + 2) + (x - 1)(3x + 7)$ $\quad L = 6a(x + 2) - 3a(1 - 3x)$

Solution

1. Développement

$A = 6 + 4x$ $\quad B = -2y - 8x)$

$C = 42 - 7x + 14y$ $\quad D = -4x + 12y$

$E = x^2 + 2x - 8$ $\quad F = x^2 - xy + 1.5x - 1.5y$

2. Factorisation

$G = 5(y + x)$ $\quad H = 6(6 - x)$ $\quad I = 11(4x + 5y)$

$J = 10(-10x + y^2)$ $\quad K = (x - 1)(4x + 9)$ $\quad L = 3a(5x2)$

IV Identités remarquables

Activité

1. Développer en utilisant la double distributivité

	Forme développée	**Forme développée et réduite**
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$	$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$	$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. Que peut-on déduire ?

Propriété

Si a et b sont deux nombres décimaux relatifs, alors

Développer

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Factoriser

Exemples

Développer les expressios suivantes en utilisant les identités remarquables

On a : $A = (x+3)^2$
$A = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$
Donc : $A = x^2 + 6x + 9$

On a : $B = (4-y)^2$
$B = 4^2 + 2 \times 4 \times y + y^2$
Donc : $B = 16 - 8y - y^2$

On a : $C = (x-5)(x+5)$
$C = x^2 - 5^2$
Donc : $C = x^2 - 25$

Application

En utilisant les identités remarquables, dévelipper les expressions suivantes

☆ $A = (x+7)^2$ ☆ $B = (8-y)^2$ ☆ $C = (2x+3)^2$

⋆ $D=(b-4)(b+4)$ ⋆ $E=(2a+5)(2a-5)$

Solution

⋆ $A=x^2+14x+49$ ⋆ $B=64-16y+y^2$ ⋆ $C=4x^2+12x+9$

⋆ $D=b^2-16$ ⋆ $E=4a^2-25$