Chapitre

Vecteurs et translation

Cours 3AC

Partie 1 : Les vecteurs

I Le vecteur

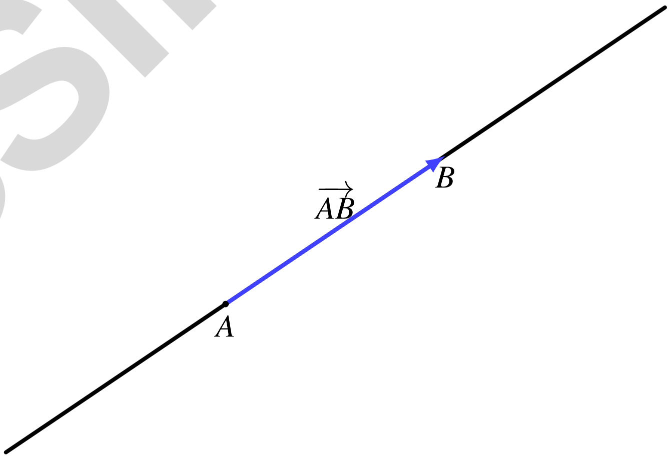
1 Caractéristique d'un vecteur non nul

Définition

Soient A et B deux points différents du plan
Le couple (A, B) détermine le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de varactéristiques :

- ☆ La direction : c'est la droite (AB)
- ☆ Le sens : c'est le sens de la demi droite $[AB)$, c'est à dire de A vers B
- ☆ La norme (Le module) : c'est la distance AB
- ☆ Le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- ☆ Le point B est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$

✿ Figure géométrique :



2 Vecteur nul

Définition

★ Chaque point A détermine un vecteur nul $\overrightarrow{AA}$ noté $\overrightarrow{O}$ et on écrit $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{O}$
★ Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$ alors $A = B$ (C'est à dire que les points A et B sont confondus)

Remarque

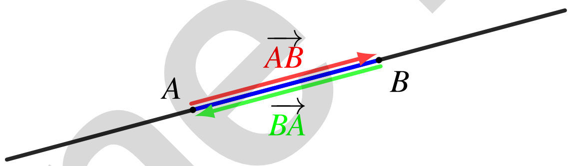
La norme d'un vecteur nul est zéro, mais la direction et le sens ne sont pas définies

3 L'opposé d'un vecteur

Définition

Soient A et B deux points du plan
On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{O}$
Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ s'appelle le vecteur opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on écrit $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

✿ Figure géométrique :



II Égalité de deux vecteurs

1 Définition

Définition

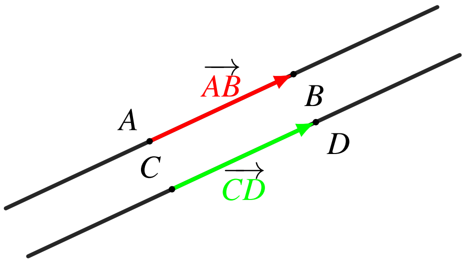
☆ Dire que deux vecteurs sont égaux, signifie qu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme
☆ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que :
➨ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, c'est à dire que : $(AB) \parallel (CD)$
➨ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens
➨ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même norme, c'est à dire que $AB = CD$

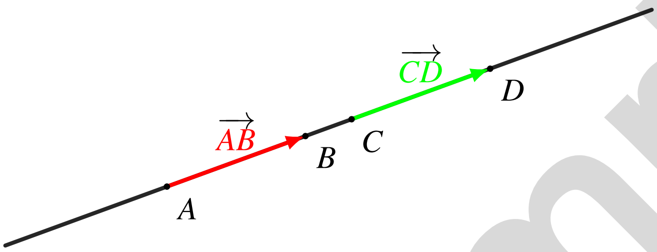
Remarque

Même direction signifie que leurs directions sont soit deux droites strictement parallèles, soit deux droites confondues

✿ Figure géométrique :

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$





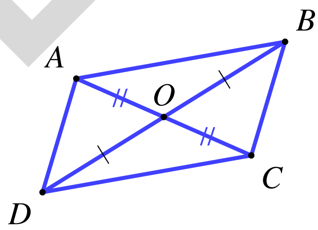
2 Propriétés importantes

Propriété

☆ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ est équivalent à dire que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu
☆ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ est équivalent à dire que $ABCD$ est un parallélogramme

✿ Figure géométrique :

Soit $ABCD$ est un parallélogramme
On a
❶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
❶ les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu O



Remarque

$ABCD$ est un parallélogramme signifie que : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ ou bien } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ ou bien } \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \end{cases}$

Application

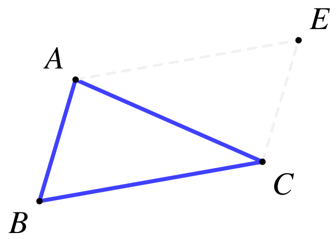
Soit ABC un triangle

1 Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$

2 Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$

Solution

1 Construisons le point E



2 Montrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$
On a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$, donc $AECB$ est un parallélogramme
Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$

III Somme de deux vecteurs

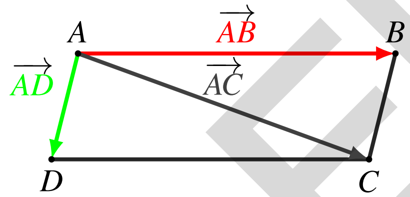
1 Définition

Définition

On dit que le vecteur $\overrightarrow{ac}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ si $ABCD$ est un parallélogramme et on écrit $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

✿ Figure géométrique :

$ABCD$ est un parallélogramme , donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$



❀ Récapitulatif d'un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme

❶ $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB} \end{cases}$

❷ $\begin{cases} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB} \end{cases}$

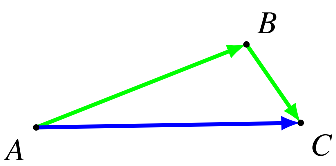
❸ $[AC]$ et $[BC]$ ont le même milieu

2 Relation de Chasles

Proposition

Si A, B et C sont trois points du plan, alors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
Cette relation s'appelle Relation de Chasles

✿ Figure géométrique :



On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

• Exemple

Simplifier les expressions suivantes :
① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ ② $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}$ ③ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC}$

Solution

Simplifions :

① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{O}$

② $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

③ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

Application

Soit ABC un triangle

1 a Construire le point E tel que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$

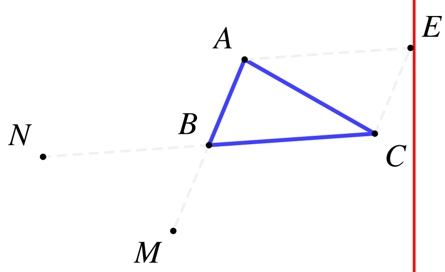
b Construire M et N les symètriques respectives de A et C par rapport à B

2 Montrer que : $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}$

Solution

1 a On a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$, donc $AECB$ est un parallélogramme

b On a M et N les symètriques respectives de A et C par rapport à B, donc B est le milieu des segments $[AM]$ et $[CN]$
Construisons une figure



2 Montrons que : $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}$
On a M et N les symètriques respectives de A et C par rapport à B
Donc B est le milieu des segments $[AM]$ et $[CN]$
D'où $ANMC$ est un parallélogramme , alors $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}$

IV Produit d'un vecteur par un nombre réel

1 Définition

Définition

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul, et k un nombre réel
On appelle le vecteur $\overrightarrow{AM}$ le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le réel k si M est un point de la droite (AB) et on écrit : $\overrightarrow{AM} = k \times \overrightarrow{AB}$ ou tout simplement $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

✶ Si $k > 0$ alors $AM = kAB$ et $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens
✶ Si $k < 0$ alors $AM = -kAB$ et $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont des sens opposés
✶ Si $k = 0$ alors A et M sont confondus

Remarque

✯ $0 \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$ et $k \times \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}$

Exemple

Soit ABC un triangle
Construire les point E et F tel que : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \dfrac{-3}{2}\overrightarrow{BC}$

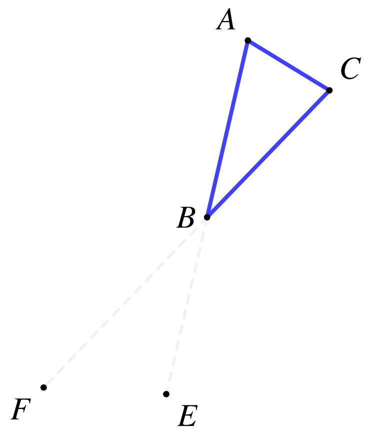
Solution

On a $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$

Donc $\begin{cases} ✹ E \in (AB) \\ ✹ \overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ ont le même sens} \\ ✹ AE = 2AB \end{cases}$

Et on a $\overrightarrow{BF} = \dfrac{-3}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc $\begin{cases} ✹ F \in (BC) \\ ✹ \overrightarrow{BF} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ ont des sens opposés} \\ ✹ BF = \dfrac{3}{2}BC \end{cases}$



2 Vecteurs et milieu

Proposition

dire que M est le milieu du segment $[AB]$ signifie que : $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{O} \\ \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} \end{cases}$

Remarque

On utlise souvent $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

3 Propriétés importantes

Propriété

Soit k un nombre réel non nul

- ✪ Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors les points A, B et C sont alignés
- ✪ Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MN}$, alors $(AB) \parallel (MN)$, on dit que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires

Application

Soit $ABCD$ un parallélogramme et E un point tel que : $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
Montrer que les points D, C et E sont alignés

Solution

Montrons que les points D, C et E sont alignés
On a $ABCD$ un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
Or $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$
D'où les points D, C et E sont alignés

Application

Soit ABC un triangle et E et F deux points tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{-7}{5}\overrightarrow{BC}$ et C le milieu du segment $[BF]$
Montrer que : $(AE) \parallel (CF)$

Solution

Montrons que : $(AE) \parallel (CF)$
On a C est le milieu de $[BF]$ donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CF}$

Or $\overrightarrow{AE} = \dfrac{-7}{5}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AE} = \dfrac{-7}{5}\overrightarrow{CF}$
D'où $(AE) \parallel (CF)$

Partie 2 : La translation

V La translation

1 Activités

Activité

Soient A ; B et M trois ponts du plan

Construire, dans chacun des cas, le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

$ABM'M$ est un parallélogramme

Dans chacun des cas, on dit que le point M' est l'image du point M par la translation T de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (la translation qui transforme A en B)

2 Définition

Définition

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul, et M un point du plan

On dit que le point M' est l'image du point M par la translation T de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (la translation qui transforme A en B) si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, c'est à dire que $ABM'M$ est un parallélogramme

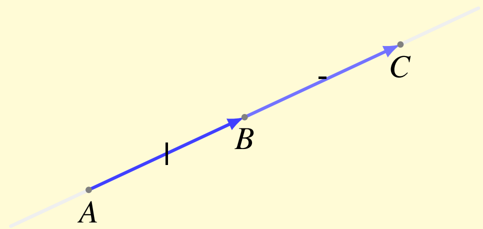
3 Propriétés caractéristiques

Propriété

Si M' et N' sont respectivement les images de M et N par translation T, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

Remarque

Soit $T_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors, l'image de A par la translation T est le point B et l'image de B par la translation T est le point C tel que B soit le milieu du segment $[AC]$



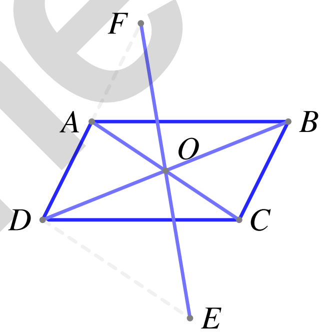
Application

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O

1. Construire le point E image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
2. Construire F symétrique du point D par rapport au point A
3. Montrer que O est le milieu du segment $[EF]$

Solution

1. Le point E est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
   Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$
2. F est le symétrique de D par rapport à A
   Donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AF}$
   Construisons la figure



3. Montrons que O est le milieu de $[EF]$
   On a E est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
   Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$
   Alors $ACED$ est un parallélogramme
   Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$ ❶
   Or F est le symétrique de D par rapport à A
   Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FA}$ ❷
   De ❶ et ❷ on trouve que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FA}$
   Ce qui signifie que $FAEC$ est un parallélogramme de diagonales $[EF]$ et $[AC]$
   Comme O est milieu de $[AC]$ (car centre du parallélogramme $ABCD$)
   Alors O est le milieu de $[EF]$

VI L'image de quelque figure par une translation

1 L'image d'une droite

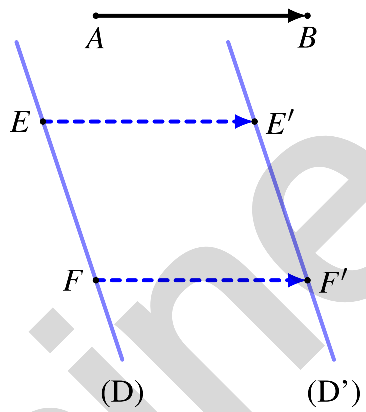
Proposition

L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle

Pour construire l'image d'une droite par une translation, on construit les images de deux points de cette droite par la translation

✿ Figure géométrique :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et (D) une droite
Construisons (D') l'image de la droite (D) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



On a $(D) \parallel (D')$

Proposition

Les images des points alignés par une translation sont aussi alignés. On dit que la translation conserve l'alignement des points

Application

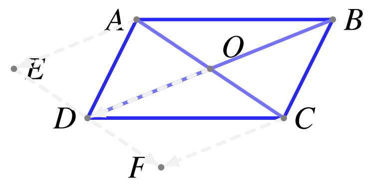
Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O

1. Construire le point E image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$
2. Construire le point F image du point C par la même translation
3. Montrer que les points E, F et D sont alignés

Solution

1. E image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$
   Donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OD}$

2 F image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$
Donc $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OD}$ Construisons la figure



3 Montrons que les points E, F et D sont alignés
On a les points E, F et D sont les images respectives des points A, C et O par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$
Et on a A, C et O sont alignés, et on sait que la translation conserve l'alignement des points
Alors les points E, F et D sont alignés

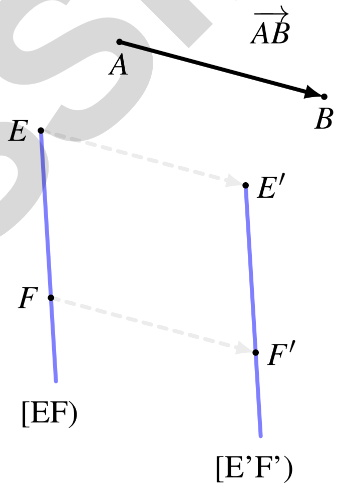
2 Image d'une demi droite

Proposition

L'image d'une demi-droite $[EF)$ par une translation est la demi-droite $[E'F')$ tel que E' et F' sont les images respectives de E et F par la même translation et on a $(EF) \parallel (E'F')$

✿ Figure géométrique :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et $[EF)$ une demi-droite
Construisons la demi-droite $[E'F')$ l'image de la demi-droite $[EF)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



On a $(EF) \parallel (E'F')$

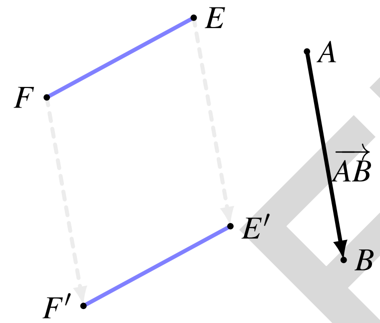
3 Image d'un segment

Proposition

L'image d'un segment par une translation est un segment de même longueur
On dit que la translation conserve la direction

✿ Figure géométrique :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et $[EF]$ un segment
Construisons le segment $[E'F']$ l'image du segment $[EF]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



On a $(EF) \parallel (E'F')$ et $EF = E'F'$

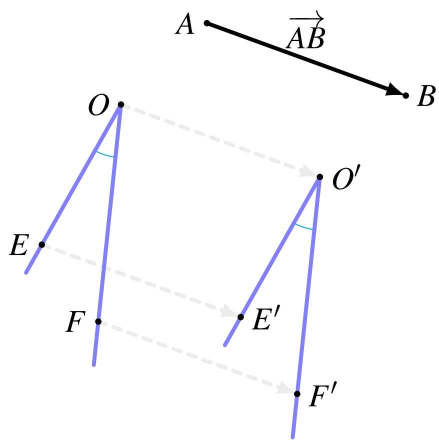
4 Image d'un angle

Proposition

L'image d'un angle par une translation est un angle de même mesure
On dit que la translation conserve la mesure des angles

✿ Figure géométrique :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et $\widehat{EOF}$ un angle
Construisons l'angle $\widehat{E'O'F'}$ l'image de l'angle $\widehat{EOF}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



On a $\widehat{EOF} = \widehat{E'O'F'}$

5 Image d'un cercle

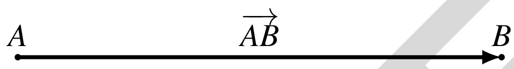
Proposition

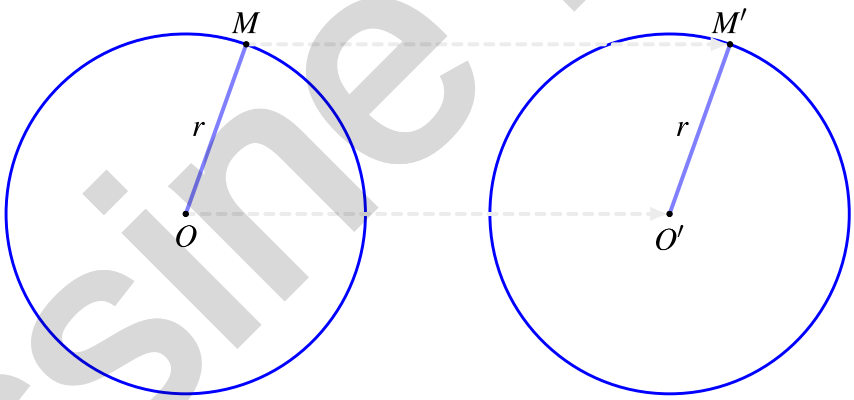
L'image d'un cercle (C) de centre O et de rayon r par une translation est le cercle (C') de centre O' l'image de O par la même translation et de même rayon r

> ⚠ Pour construire l'image d'un cercle par une translation, on construit l'image du centre par la même translation et on garde le même rayon

✿ Figure géométrique :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et (C) un cercle de centre O et de rayon r
Construisons le cercle (C') l'image du cercle (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$





Application

Doit ABC un triangle tel que $AB = 4cm$ et $\widehat{BAC} = 70°$
On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{AC}$
Soient E et F les images respectives des points C et B par la translation t

1. Faire une figure
2. Montrer que $(BC) \parallel (EF)$
3. Calculer CF
4. Calculer $\widehat{FCE}$

Solution

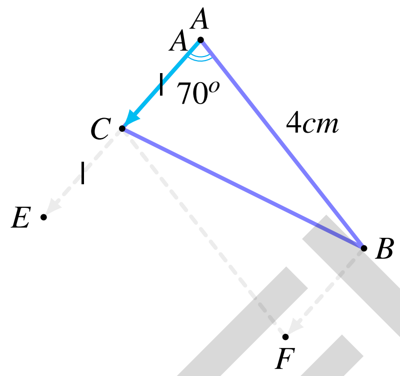
1 Faisons une figure

On a E est l'image de C par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE}$, c'est à dire que C est le milieu du segment $[AE]$

Et on a F est l'image de B par la translation t

Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$, c'est à dire que $ACFB$ est un parallélogramme



2 Montrons que $(BC) \parallel (EF)$

On a E et F sont les images respectives de C et B par la translation t

Donc la droite (EF) est l'image de la droite (BC) par la translation t

D'ou : $(EF) \parallel (BC)$

3 Calculons CF

t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, donc C est l'image de A par la translation t

Et puisque F est l'image de B part t et la translation coserve la distance

Donc $CF = AB$

Et comme $AB = 4cm$ Alors $CF = 4cm$

4 Calculons $\widehat{FCE}$

On a F, C et E sont les images respectives des points B, A et C par la translation t

Donc l'angle $\widehat{FCE}$ est l'image de l'angle $\widehat{BAC}$ par la translation t

Et comme la translation conserve la mesure des angles, donc $\widehat{FCE} = \widehat{BAC}$

Alors $\widehat{FCE} = 70°$