Chapitre

Produit scalaire dans l'espace et applications

EXO 2BSX

Exercice : 1

Soit $A(2;0;2)$ un point de l'espace et (P) le plan d'équation : $x+y-z+3=0$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et orthogonale au plan (P).
2. Déterminer les coordonnées du point B sintersection de la droite (D) et le plan (P).
3. Écrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre A et qui coupe le plan (P) suivant le cercle de centre B et de rayon 2 ..

Exercice : 2

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(0;1;1)$ et qui passe par le point $A(0;2;1)$.

1. **a-** Écrire une équation de la sphère (S).
   b- Donner une équation cartésienne du plan (P) tangent à la sphère (S) en A.
2. Soit (Δ) la droite passant par O et orthogonaleà (P). Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en $B(0;1;0)$.

Exercice : 3

On considère dans l'espace les points $A(1;0;1), B(0;1;0), C(0;1;1), E(1;1;0)$ et la droite (D) qui passe par le point E et de vecteur directeur $\vec{u}(1;1;-1)$.

1. **a-** Montrer que : $x+y-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
   b- Déterminer $(D)\cap(ABC)$.
2. Donner une équation cartésienne du plan (P) contenant la droite (D) et orthogonal au plan (ABC).
3. Soit (S) la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   a- Écrire une équation cartésienne de la sphère (S).
   b- Montrer que l'intersection du plan (ABC) et la sphère (S) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Yassine Elamri

Exercice : 4

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1;0;-2)$ et de rayon $r=2$ et $A(0;\sqrt{2};-1)$ un point de l'espace.

1. Donner une équation cartésienne de la sphère (S)
2. **a-**Vérifier que $A \in (S)$.
   b- Déterminer une équation cartésienne du plan (P) tangent à la sphère (S) en A.
3. **a-**Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point O et orthogonale au plan (P).
   b-Déterminer l'intersection de (S) et (D).

Exercice : 5

Soit les points $A(1;1;1), B(0;1;2)$ et $C(-3;2;5)$ et le plan (P) d'équation :

$$(P) : x-y-z+2=0.$$

1. **a-** Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires.
   b- Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
   c- Montrer que $(P) \perp (ABC)$.
2. Soit (Δ) la droite passant par le point O et orthogonale au plan (P).
   a- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   b- Déterminer l'intersection de la droite (Δ) et le plan (P).
3. Soit (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-2=0$
   a- Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).
   b- Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).
   c- Montrer que l'intersection du plan (P) et la sphère (S) est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice : 6

On considère dans l'espace le plan (P) et la sphère (S) tels que :

$$(P) : x-y-z-1=0. \text{ et } (S) : x^2+y^2+z^2-2x-2y=0.$$

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S).
2. Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on déterminera le centre ω et le rayon r.
3. Soit (Q) le plan tangent à la sphère (S) en O.
   a- Donner une équation du plan (Q).
   b- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) intersection de (P) et (Q).

Yassine Elamri

4 **a-** Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point O sur la droite (Δ).
b- Montrer que H est aussi le projeté orthogonal du point ω sur la droite (Δ).
c- Montrer que les points $\omega;\Omega;O$ et H sont coplanaires et cocycliques (ils appartiennent au même cercle).

Exercice : 7 (Supplémentaire)

Soit (S_m) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient :

$$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$$

où m est un paramètre réel.

1. Montrer que (S_m) est une sphère pour tout m de $\mathbb{R}$. (déterminer son centre Ω_m et son rayon R_m en fonction de m).
2. Déterminer le lieu géométrique du point Ω_m lorsque m vari dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe un cercle $(\mathscr{C})$ tel que $(\mathscr{C}) \subset (S_m)$ pour tout m de $\mathbb{R}$, (déterminer le centre et le rayon de $(\mathscr{C})$).
4. Soit A un point de l'espace, n'appartenant pas au plan d'équation : $x+2y+z=0$.
Montrer qu'il existe un unique réel m_0 tel que : $A \in (S_{mo})$.

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today