Chapitre

Produit scalaire dans l'espace et applications

Dans tout ce qui suit l'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{k},\vec{k})$. E)

I Le produit scalaire dans lespace et ses proprités

1 Définition et proprités

Activité

On considère dans l'espace les points $A(2;1;3), B(1;1;-2)$ et $C(2;-1;0)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Etudier l'alignement des points A, B et C.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. Est-ce que le point $D(4,-3,2)$ appartient à (AB) ?
5. Donner deux équations cartésiennes de la droite (AB).
6. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

D Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteur de l'espace et $A;B$ et C trois points de l'espace tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ il existe au moins un plan (P) passant par les points $A;B$ et C, (par exemple le plan (ABC)). Alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace c'est le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans le plan (P) noté : $\vec{u}\cdot\vec{v}$

Remarque

Toutes les proprités du produit scalaire dans le plan restent valables dans l'espace.

D Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, le nombre réel définit par :

– $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul.
– $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$, dans le cas contraire.
– $\vec{u}.\vec{v}$ se lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ".

Propriété

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ Trois vecteurs de l'espace et $k \in \mathbb{R}$.
Alors on a :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;
2. $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
3. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$;
4. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$.

Application

Soient $A(1;1;\sqrt{2})$ et $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$ et $C(-1;-1;-\sqrt{2})$ trois points dans l'espaces .
Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

2 Orthogonalité dans lespace :

D **Définition**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans l'espaces .
les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si lun des deux vecteurs est nul ou si les directions des deux vecteurs sont perpendiculaires.

T **Théorème**

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$$

3 Vecteur normal à un plan :

D **Définition**

Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal au plan (P) si $\vec{n}$ non nul est orthogonal à tout vecteur de (P).

Propriété

Pour qu'un vecteur $\vec{n}$ soit normal au plan (P), il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (P).

Propriété

Soient $D_1\,(\vec{u}_1)$ et $D_2\,(\vec{u}_2)$ deux droites alors : $(D_1)\perp(D_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = 0$ $\vec{u}_1$ est le vecteur directeur de (D_1) et $\vec{u}_2$ celui de (D_2).

Propriété

Soit (P) un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ et soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ alors :
$(P)\perp(D) \Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{u}_1$ et $\vec{v}\perp\vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u}_1 = 0$ et $\vec{v}\cdot\vec{u}_2 = 0$

Propriété

Soient (P) et (Q) deux plans de l'espace et $\vec{n}_{(P)}$ et $\vec{n}_{(Q)}$ sont respectivement deux vecteurs normaux de (P) et (Q).

- (P) et (Q) sont orthogonales si et seulement si $\vec{n}_{(Q)} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0$.
- (P) et (Q) sont parallèles si et seulement si $\vec{n}_{(Q)}$ et $\cdot\vec{n}_{(P)}$ sont parallèles.

4 Équation dun plan définie par un point et un vecteur normal

Propriété

Soient $\vec{u}(a,b,c)$ un vecteur non nul et A un point de l'espace et $k \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$ est un plan d'équation
$ax+by+cy+d=0 \qquad (avec\ d \in \mathbb{R} \quad dterminer)$.

Propriété

Soient $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal à un plan (P) alors une équation cartésienne de (P) est : (P) : $ax+by+cz+d=0$ (où $d \in \mathbb{R}$ à déterminer).

Application

Déterminons une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(1;0;5)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-1;1;0)$, on a :

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in (P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \times -1 + (y-0) \times 1 + (z-5) \times = 0 \\ &\Leftrightarrow -x+1+y=0 \\ &\Leftrightarrow -x+y+1=0 \end{aligned}$$

alors une équation de (P) est (P) : $-x+y+1=0$

Application

Déterminons une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(1,-2,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1,-3,-2)$. Soit $M(x,y,z)$ un point de $(\mathscr{P})$.
On a $\overrightarrow{AM}(x-1, y+2, z-3)$.
Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 &\Leftrightarrow (x-1) - 3(y+2) - 2(z-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 3y - 2z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Comme $(\mathscr{P})$ est de vecteur normal $\vec{n}(1,-3,-2)$, alors $(\mathscr{P})$: $x-3y-2z+d=0$.
Or $A \in (P)$, alors $1-3(-2)-2(3)+d=0$ et $d=-1$.
D'où (P) : $x-3y-2z-1=0$.

5 Distance dun point à un plan

Activité

Soit (P) un plan passe $A\,(x_A, y_A, z_A)$ par et de vecteur normale $\vec{n}(a;b;c)$.

1. explique pour quoi on a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}$, pour tout point M du plan .
2. Montre que $-ax_A - by_A - cz_A = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \times \mid \overrightarrow{AH} \| \times \cos(\vec{n};\overrightarrow{AH})$.
3. Déduire la distance AH.

Propriété

Soient (P) un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A\,(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace.
La distance du point A au plan (P) est : $d(A,(P)) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exemple

Calculons la distance du point $A(1,-1,2)$ du plan (P) d'équation $(P) : 2x+y-z+1=0$.
On a $\vec{n}(2,1,-1)$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$.
Donc $d(A,(P)) = \frac{|2\times1-1-2+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = 0$, en déduit que $A \in (P)$.

Application

On considère $(\mathscr{P})$ le plan d'équation $x+y+z+1=0$ et $A(1,2,0)$ est point de l'espace.

1. Calculer $d(A,(P))$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A est orthogonal à $(\mathscr{P})$.
3. Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.

II Étude analytique de la sphère

Dans un espace tridimensionnel, une sphère (S)de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est l'ensemble de tous les points P tels que la distance entre P et le centre C soit égale au rayon R.
Et on a

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (S) &\Leftrightarrow \Omega M = R \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2 = R^2. \end{aligned}$$

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la sphère (S).

Propriété

Soit (S) une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R.
Une équation cartésienne de (S)est l'écriture : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
C'est à dire : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ avec : $d=a^2+b^2+c^2-R^2$

Propriété

Soient A et B deux points de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$

Application

1
   a Déterminer l'équation cartésienne du sphère (S_1) de centre $\Omega(1,-1,2)$ et passant par le point $A(-1,4,5)$.
   b Est-ce que le point $B(1,2,-2)$ appartient à (S_1) .

2 Déterminer l'équation cartésienne du sphère (S_2) de diamètre $[AB]$ avec, $A(1;0;-2)$ $B(3;1;1)$.

3 Montrer que Γ l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+5=0$ est une sphère et déterminer ses éléments caractéristiques.

1 Intersection dune sphère et dune droite

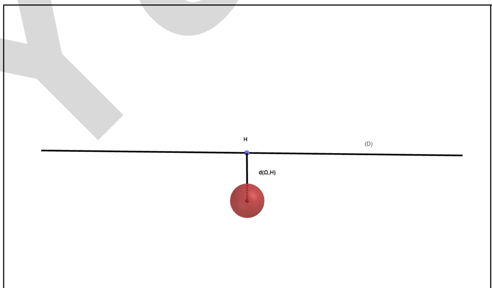
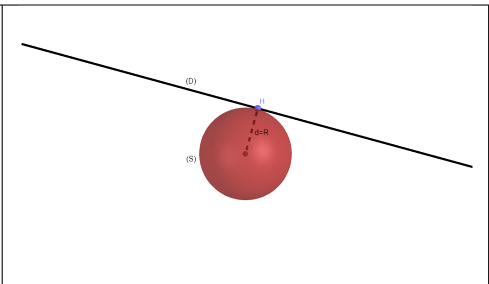
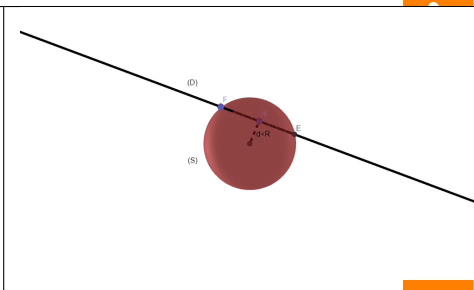
Propriété

Soit $S(\Omega;R)$ une sphère et (D) une droite dans l'espace. Posons $d=d(\Omega;(D))$ On a trois cas :

1 Si $d<R$ alors la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points distincts.
2 Si $d=R$ alors la droite (D) coupe la sphère (S) en un seul point. (D) est tangente à (S).
3 Si $d>R$ alors la droite (D) ne coupe pas la sphère (S).

a graphiquement

soit d la distance entre la droite (D) et la sphère (S) .
Alors on a :

		
si $R<d$	si $R=d$	si $R>d$

Exemple

1 Soit (S) la sphère d'équation : (S) : $x^2+y^2+z^2-2y+4z+4=0$

$$(D_3):\begin{cases} x=\frac{-1}{2}+t \\ y=\frac{1}{2}+2t \\ z=1 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (D_2):\begin{cases} x=3t \\ y=2 \\ z=-2+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (D_1):\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-3+2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Déterminons l'intersection de la sphère (S) et les droite $(D_1)\,;(D_2)$ et (D_3).

2 Intersection dune sphère et dune plan

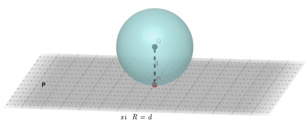
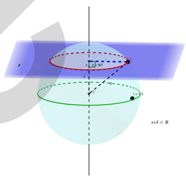
Propriété

Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R et (P) un plan dans l'espace et $d=d(\Omega;(P))$.

1 Si $d>R$, alors (P) ne coupe pas (S).

2 Si $d>R$, alors (P) est tangent à (S) en un point H le projeté orthogonale de Ω sur (P).

3 Si $d<R$, alors (P) coupe (S) suivant un cercle de centre H le projeté orthogonale de Ω sur (P) et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

		
si $R=d$	si $R<d$	si $R>d$

Exemple

On considère l'ensemble (S) des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$.

1 Montrer que (S) est une sphère en déterminant son centre et son rayon R.

2 Etudier la position relative de (S) et les plans suivants :

a. $(P_1):2x+y+2z-3=0$.

3 $(P_2):x-2y+2z+3=0$.