Chapitre

Les droites remarquables dans un triangle

Cours 1AC

I Médiatrice d'un segment

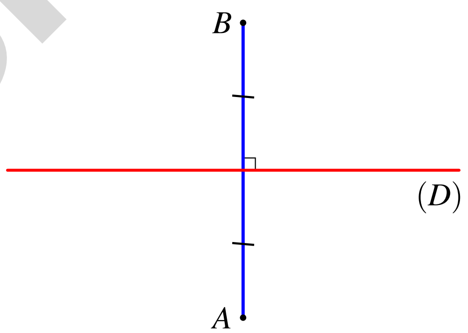
Activité

1. Tracer un segment $[AB]$
2. Construire un triangle AMB isocèle en M
3. **Sur la même figure**, construire 4 autres triangles AM_1B, AM_2B, AM_3B et AM_4B isocèles en M_1, M_2, M_3 et M_4
4. Que peut-on dire des points M_1, M_2, M_3 et M_4 ?
5. Tracer la droite passant par la série des points M_i. Appelle-la (d)
6. Que peut-on dire de cette droite (d) par rapport au segment $[AB]$?
   ✸ (d) semble .... au segment $[AB]$
   ✸ (d) semble passe par .... du segment $[AB]$
7. Cette droite est la ***médiatrice*** du segment $[AB]$
   Essaie de donner une définition de la médiatrice d'un segment à partir de tes réponses à la question 6

Définition

La médiatrice d'un segment, est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu

Exemple

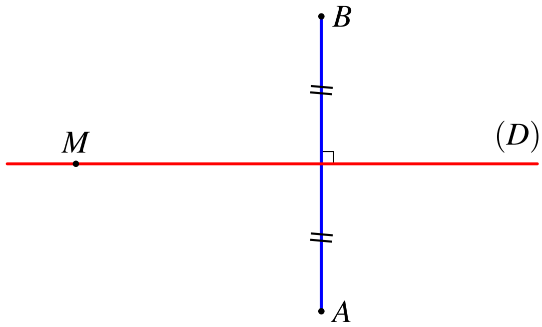


La droite (D) est la médiatrice du segment $[AB]$

Propriété

Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment

• Exemple

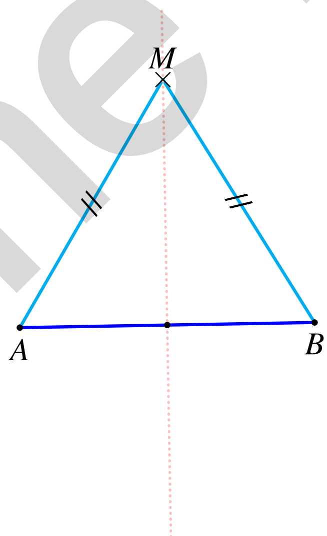


La droite (D) est la médiatrice du segment $[AB]$ et $M \in (D)$, alors : $MA = MB$

Propriété

Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment

• Exemple



On a : $MA = MB$
Donc le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

Application

On considère le segment $[EF]$, tel que : $EF = 5cm$

1. Construire D la médiatrice du segment $[EF]$
2. Soit un point G appartenant à la droite (D)
   Déterminer la nature du triangle GEF. Justifier ta réponse

II Médiatrices d'un triangle

Activité

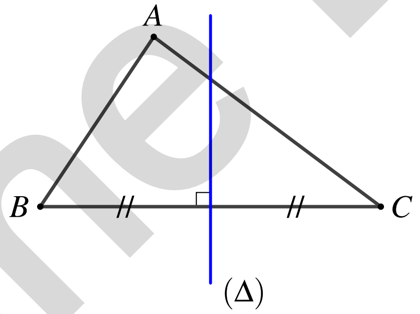
Tracer un triangle PQR dont les côtés ont pour longueurs $12cm$, $9cm$ et $10cm$

1. Construire (D_1) la médiatrice de $[PQ]$
2. Construire (D_1) la médiatrice de $[PR]$
3. Soit O le point d'inteersection des droites (D_1) et (D_2)
   a. Montrer que : $OP = OQ = OR$
   b. Le cercle de centre O passant par P passe aussi par Q et R
   c. Le point O appartient à la médiatrice de $[RQ]$

Définition

Les médiatrices d'un triangle sont les médiatrices de ses côtés

Exemple

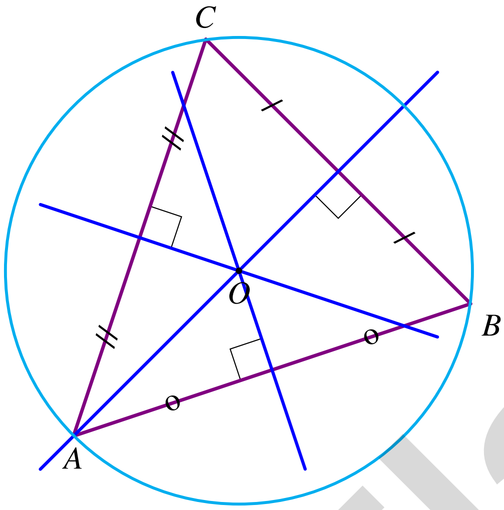


Soit ABC un triangle
La droite (Δ) est la médiatrice du côté $[BC]$
On appelle (Δ) une médiatrice du triangle ABC

Propriété

✷ Les médiatrices des trois côtés d'un triangle se coupent en un seul point, on dit qu'elles sont concourantes
✷ Ce point est le centre d'un cercle qui passe par les trois sommets du triangle, ce cercle est le cercle circonscrit au triangle

• Exemple

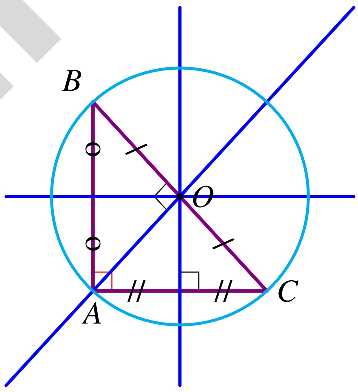


Les médiatrices du triangle ABC sont concourantes au point O
Ce point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

Remarque

Le centre du cercle circonscrit à un triangle peut être à l'intérieur du triangle, à l'exterieur du triangle, ou sur l'un des côtés

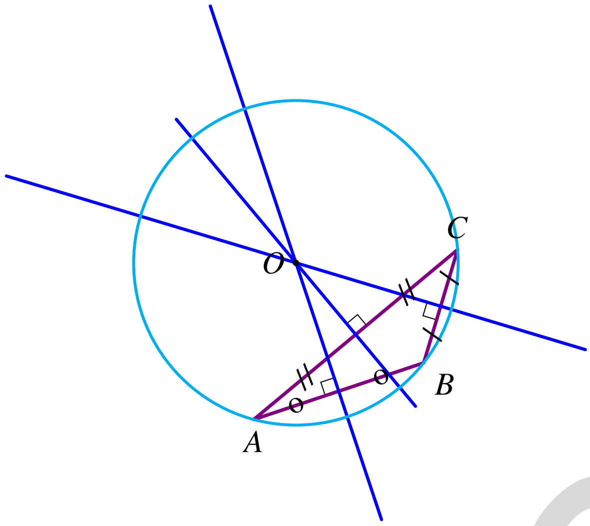
➮ ***Cas* ① :** A l'éxterieur du triangle
Si l'un des angles est un angle obtus



➮ ***Cas* ② :** Sur l'un des côtés du triangle
Si l'un des angles est un angle droit

1.Chapter 1 Les droites remarquables dans un triangle

Yesterday better than today, tomorrow better than today

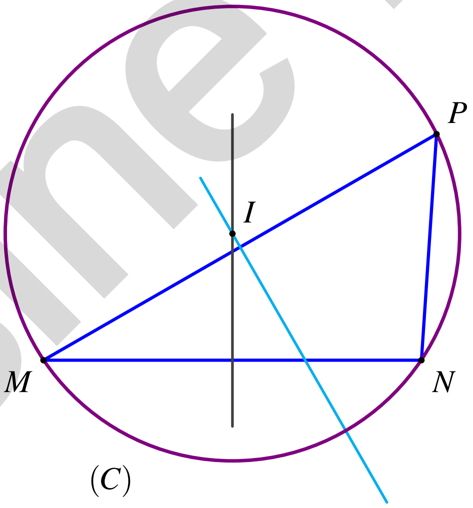


Application

Soit MNP un triangle tel que : $MN = 5cm$, $MP = 6cm$ et $NP = 3cm$

1. Construire le triangle MNP
2. Construire le cercle circonscrit au triangle MNP

Solution



III Hauteurs d'un triangle

Activité

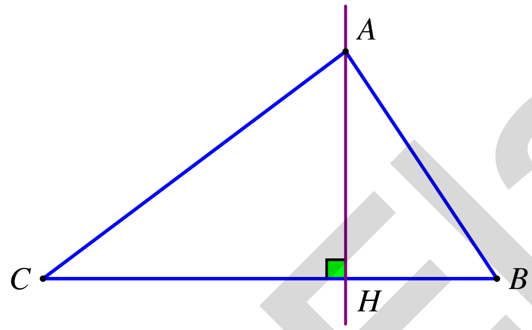
1. Construire un triangle ABC tel que $AB = 6cm$, $BC = 8cm$ et $AC = 12cm$
2. Dans un triangle ABC, on dit que (AT) est une hauteur du treiangle ABC issue du point A si $T \in [BC]$ et (AT) est perpendiculaire à (BC) (cette droite passe donc par le sommet A du triangle ABC)
Construire la hauteur issue de A et la hauteru issue de B. On note H le point d'intersection

3 Que peut-on conjecturer pour la droite (CH)

Définition

Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par l'un des sommets de ce triangle, et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet

Exemple

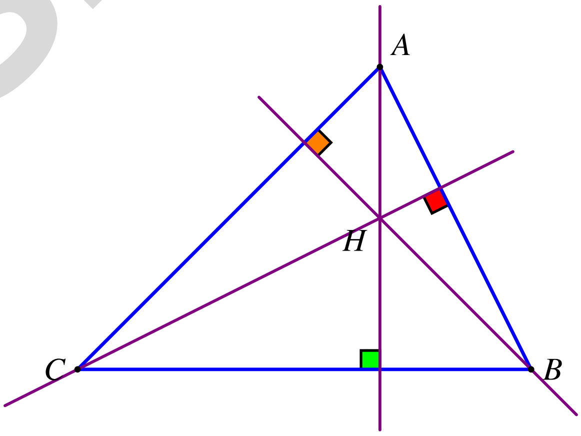


✷ La droite (AH) est la hauteur du triangle ABC
✷ La droite (AH) est la hauteur issue du sommet A

Propriété

☆ Les hauteurs d'un triangle se coupent en un seul point, on dit qu'elles sont concourantes
☆ Ce point s'appelle l'orthocentre du triangle

Exemple



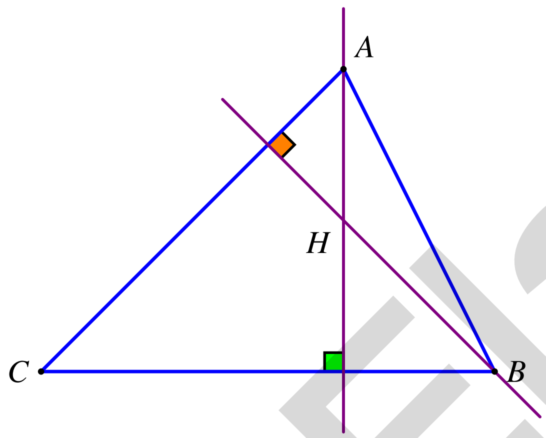
Le point H est l'orthocentre du triangle ABC

Application

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 5cm$, $AC = 6cm$ et $BC = 3cm$

1. Construire le triangle ABC
2. Construire l'orthocentre du triangle ABC

Solution



IV Bissectrice d'un angle

Activité

1. a. Construire un angle AOC
   b. Construire le point B symétrique du point A par rapport à la droite (OC)
   c. Déduire que : $\widehat{BOC} = \widehat{AOC}$
   On dit que la demi-droite $[OC)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$
2. Soit $ABCD$ un losange
   Vérifier que $[AC)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$

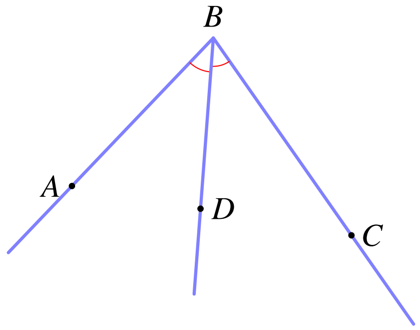
Activité

❶ Sur une feuille blanche, tracer un angle $\widehat{ABC}$
❷ Plier cette feuille de façon à faire apparaitre d'axe de symétrie de l'angle $\widehat{ABC}$. Repasser-le en couleur, puis placer un point D sur cet axe
❸ Cet axe fait apparaitre deux nouveaux angles . Nommer-les
❹ Que peut-on dire de la mesure de ces deux angles ? Justifier
Comment s'appelle la demi droite $[BD)$

Définition

La bissectrice d'un angle, est la demi-droite issue du sommet de cet angle et qui le partage en deux angles égaux (de même mesure)

• Exemple



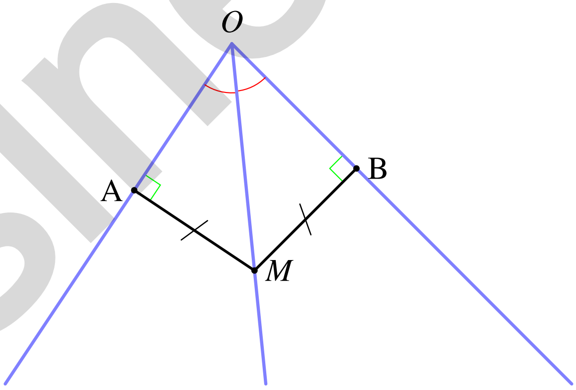
✷ Le demi-droite $[BD)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$
✷ Les deux angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CBD}$ sont égaux et on écrit : $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$

➮ ***Propriété caractéristique de la bissectrice d'un angle :***

Propriété

Si un point M appartient à la bissectrice d'un angle, alors M est à égale distance (équidistant) des côtés de cet angle

• Exemple

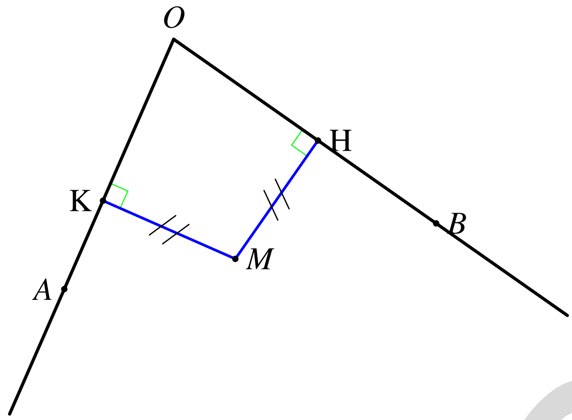


Le point M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$, donc $MA = MB$

Propriété

La réciproque
Si un point M est à égale distance des côtés d'un angle, alors le point M appartient à la bissectrice de cet angle

Exemple



Le point M est équidistant des deux côtés de la'ngle $\widehat{OAB}$: $MK = MH$, alors M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$

Application

1 construire un angle $\widehat{KLM}$ de mesure 84°

2 Construire la demi-droite $[LP)$, la bissectrice de l'angle $\widehat{KLM}$

3 Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{PLM}$

V Bissectrices d'un triangle

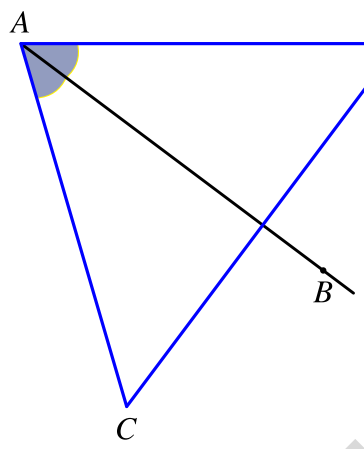
Activité

❶ Tracer un triangle ABC
❷ Tracer les trois bissectrices des angles de ce triangle. Que remarquez-vous ?
❸ Projeter le point I de concours des bissectrices sur l'un des côtés. Appelez M ce projeté
❹ Tracer le cercle de centre I et de rayon IM
Ce cercle intérieur au triangle semble-t-il tangent aux trois côtés du triangle ?

Définition

Les bissectrices des angles d'un triangle s'appelent les bissectrices de ce triangle

• Exemple

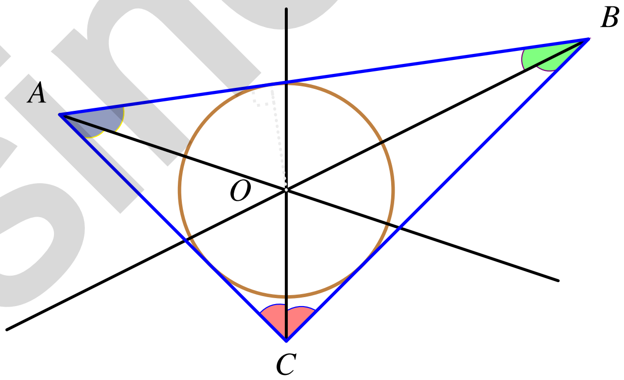


La demi-droite $[AB)$ est une bissectrice du triangle ACD

Propriété

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre du cercle inscrit dans ce triangle

• Exemple



Les bissectrices du triangle ABC sont concourantes au point O
Ce point O est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC

Application

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 5cm$, $AC = 6cm$ et $BC = 3cm$

1. Construire le triangle ABC
2. Construire le cercle inscrit dans le triangle ABC

Solution