Chapitre

Calcul Trigonométrique

Cours 1AC

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• **On pourra à loccasion de la représentation graphique des fonctions cos et sin, mettre en évidence la notion de fonction périodique (la définir et donner quelques propriétés qui la caractérisent).** • **La résolution des équations et des inéquations trigonométriques au programme sera une occasion pour approfondir les acquis des élèves concernant le cercle trigonométrique .** • **Létude des angles inscrits et des quadrilatères inscriptibles sera une occasion pour consolider et renforcer les acquis des élèves concernant la plupart des notions de la géométrie plane et pour démontrer quelques relations dans le triangle.**	• **Tracer les courbes représentatives des fonctions sin et cos et les exploiter pour lassimilation des notions de périodicité, de parité et de monotonie** • **Utiliser le cercle trigonométrique pour représenter et déterminer graphiquement les solutions déquations ou dinéquations trigonométriques.**

Les prés-requis	Les extensions
- Les lignes trigonométriques dans un cercle trigonométrique. - Angles orientés. - Théorème de Thalès et Théorème de Pythagore. - Calcul Vectoriel et Projection. - Ordre et opérations - La proportionnalité.	- Produit scalaire, produit vectoriel et applications. - Les Fonctions Numériques. - Géométrie dans lespace - Les formules de transformations trigonométriques. - Les Suites Numériques. - Physique, Mécanique et Optique. - Dérivations et Intégration. - Limites et Equations Différentielles. - Nombres Complexes

Avant propos

La trigonométrie (du grec *trigonos*, « triangulaire », et *métron*, « mesure ») est une branche des mathématiques qui traite des relations entre distances et angles dans les triangles et des fonctions trigonométriques telles que sinus, cosinus, tangente.

Les applications de la trigonométrie sont extrêmement nombreuses. En particulier, elle est utilisée en astronomie et en navigation avec notamment la technique de triangulation. Les autres champs où la trigonométrie intervient sont : physique, électricité, électronique, mécanique, acoustique, optique, statistiques, économie, biologie, chimie, médecine, météorologie, géodésie, géographie, cartographie, cryptographie, informatique etc...

Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations dÉgypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de lIndus, il y a plus de 4 000 ans. Il semblerait que les Babyloniens aient basé la trigonométrie sur un système numérique à base 60.

L'astronome et mathématicien grec Hipparque de Nicée (-190 ; -120) construisit les premières tables trigonométriques sous la forme de tables de cordes : elles faisaient correspondre à chaque valeur de l'angle au centre (avec une division du cercle en 360ř), la longueur de la corde interceptée dans le cercle, pour un rayon fixe donné. Ce calcul correspond au double du sinus de l'angle moitié, et donne donc, d'une certaine façon, ce que nous appelons aujourd'hui une table de sinus. Toutefois, les tables d'Hipparque n'étant pas parvenues jusqu'à nous, elles ne nous sont connues que par le grec Ptolémée, qui les publia, vers l'an 150, avec leur mode de construction dans son Almageste. C'est ainsi qu'elles furent redécouvertes à la fin du Moyen Âge par Georg von Purbach et son élève Regiomontanus. On attribue à Ménélaos d'Alexandrie (fin du *i*^{er} siècle) des développements en trigonométrie sphérique, au moins partiellement présents dans l'Almageste et longtemps attribués à Ptolémée lui-même.

Vers l'an 400, est rédigé un traité indien d'astronomie, le Surya Siddhanta, qui s'inspire de l'astronomie grecque, mais qui apporte une innovation concernant la trigonométrie. Alors que les mathématiciens grecs associaient la mesure d'une corde à un arc, l'ouvrage préfère associer la demi-corde à un arc donné. Cela donnera naissance à la notion de sinus. Il en sera de même plus tard des mathématiciens arabes. Le mathématicien indien Âryabhata, en 499, donne une table des sinus et des cosinus. Il utilise **zya** pour sinus, **kotizya** pour cosinus et **otkram zya** pour l'inverse du sinus. Il introduit aussi le sinus verse.

Un autre mathématicien indien, Brahmagupta, utilise en 628 l'interpolation numérique pour calculer la valeur des sinus jusqu'au second ordre.

C'est dans le monde musulman que la trigonométrie prend le statut de discipline à part entière et se détache de l'astronomie.

Abu l-Wafa (940-998) simplifie l'Almageste de Ptolémée en remplaçant l'usage du théorème de Ptolémée (qu'il nomme méthode du quadrilatère et des six quantités) par des formules de trigonométrie comparables aux nôtres (sinus de la somme de deux arcs, par exemple). Omar Khayyam (1048-1131) combine l'utilisation de la trigonométrie et la théorie de l'approximation pour fournir des méthodes de résolutions d'équations algébriques par la géométrie. Des méthodes détaillées de constructions de tables de sinus et cosinus pour tous les angles sont écrites par le mathématicien Bhskara II en 1150. Il développe aussi la trigonométrie sphérique. Au *xiii*^{e} siècle, Nasir al-Din Tusi, à la suite de Bhskara, est probablement un des premiers à considérer la trigonométrie comme une discipline distincte des mathématiques. Enfin, au *xiv*^{e} siècle, Al-Kachi réalise des tables de fonctions trigonométriques lors de ses études en astronomie.

En 1220, en Europe, Fibonacci propose une table trigonométrique dans sa Practica Geometriae, mais qui comporte malheureusement plusieurs erreurs.

La mise en place de mesures trigonométriques précises se développe vers le milieu du *xv*^{e} siècle, avec la traduction en latin des uvres de Ptolémée. Les pionniers en ce domaine sont Georg von Peuerbach et surtout son étudiant Regiomontanus. Ce dernier adopte la notion de sinus utilisée par les mathématiciens indiens et arabes. Il dresse une table des sinus avec un rayon de 600 000 unités, puis 10 000 000 d'unités et donne également une table des tangentes. Suivent au début du *xvi*^{e} siècle les traités d'Oronce Fine, Pedro Nunes et Joachim Rheticus. Ce dernier dresse une table trigonométrique pour un rayon de 1015 d'unités et avec un incrément de 10 secondes d'arc. Le mathématicien silésien Bartholomäus Pitiscus publie un travail remarquable sur la trigonométrie en 1595, dont le titre (Trigonometria) a donné son nom à la discipline. C'est le mathématicien flamand Adrien Romain qui introduit la notation moderne.

L'utilisation de rayons ayant comme mesure une puissance de 10 et le développement du calcul décimal à la fin du *xvi*^{e}, avec François Viète et Simon Stevin, amenèrent petit à petit à se ramener à un rayon unité et à introduire en tant que nombre et non plus en tant que rapport de deux longueurs.

I Représentation des fonctions sinus et cosinus

Activité

(Représentations graphiques)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère le tableau suivant :

x	-2π	$\frac{-11\pi}{6}$	$\frac{-7\pi}{4}$	$\frac{-5\pi}{3}$	$\frac{-3\pi}{2}$	$\frac{-4\pi}{3}$	$\frac{-5\pi}{4}$	$\frac{-7\pi}{6}$	$-\pi$	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0
$\cos(x)$																	
$\sin(x)$																	
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos(x)$																	
$\sin(x)$																	

1 Recopier et compléter le tableau.

2 Représenter dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ les points $M(x,\cos(x))$ et $M'(x,\sin(x))$.

(Echelle : $\frac{\pi}{12} \to 0.5cm$ et $0.25 \to 0.5cm$)

3 Déterminer les propriétés des fonctions cos et sin.

1 Etude de la fonction sinus

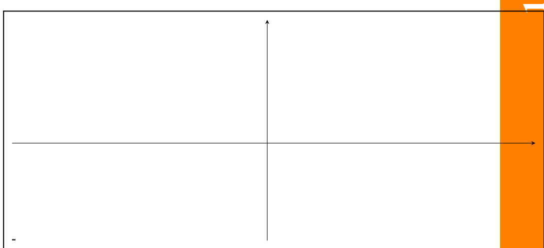
Définition

La fonction qui à tout nombre réel x , associe le nombre $\sin(x)$ est appelée **fonction sinus**, notée : $x \mapsto \sin(x)$.

Lensemble des points $M(x;\sin(x))$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelé courbe représentative de la fonction sinus.

- **Courbe de la fonction** sin

La courbe de la fonction $\sin(x)$ est symétrique par rapport à lorigine du repère, cela découle du fait que $\sin(-x) = \sin(x)$. On dit que la fonction sinus est une fonction **impaire**.



- **Périodicité de la fonction** sin

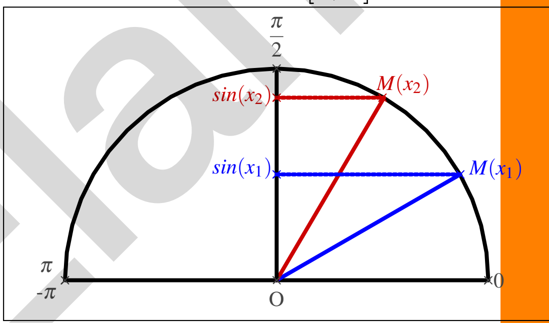
Soit $x \in \mathbb{R}$, on sait que pour tout $k \in \mathbb{Z}$; on a $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$. De même, la portion de la courbe de la fonction $\sin(x)$ sur lintervalle $[0;2\pi]$, de longueur 2π, est dupliquée, à gauche, sur lintervalle $[-2\pi;0]$. la fonction sinus est une fonction **périodique**.

- **Variation de la fonction** sin

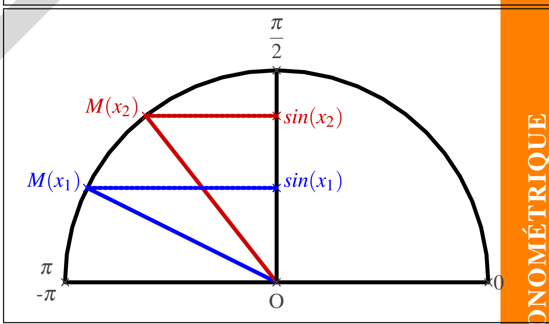
Daprès la courbe de la fonction $\sin(x)$ sur lintervalle $[-\pi;\pi]$, on observe que la fonction sinus est décroissante sur les deux intervalles $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, tandis quelle est croissante sur lintervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

En effet, puisque la fonction sinus est impaire, on peut étudier ses variations sur lintervalle $[0;\pi]$.

Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de lintervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $x_1 < x_2$ alors $\sin(x_1) < \sin(x_2)$. Donc la fonction sinus est strictement croissante sur lintervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.



Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de lintervalle $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ tels que $x_1 < x_2$ alors $\sin(x_1) > \sin(x_2)$. Donc la fonction sinus est strictement décroissante sur lintervalle $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$.



On en déduit le tableau des variations suivant :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0

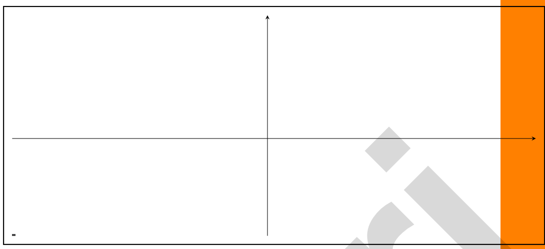
2 Etude de la fonction cosinus

Définition

La fonction qui à tout nombre réel x , associe le nombre $\cos(x)$ est appelée **fonction cosinus**, notée : $x \mapsto \cos(x)$.

Lensemble des points $M(x;\cos(x))$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelé courbe représentative de la fonction cosinus.

- **Courbe de la fonction** $\cos$



La courbe de la fonction $\cos(x)$ est symétrique par rapport à laxe des ordonnées, cela découle du fait que $\cos(-x) = \cos(x)$. On dit que la fonction cosinus est une fonction **paire**.

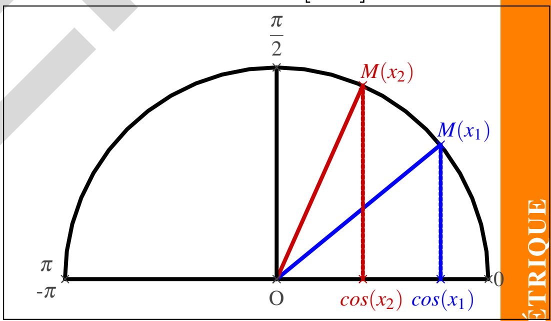
- **Périodicité de la fonction** $\cos$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on sait que pour tout $k \in \mathbb{Z}$; on a $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$. De même, la portion de la courbe de la fonction $\cos(x)$ sur lintervalle $[0;2\pi]$, de longueur 2π, est dupliquée, à gauche, sur lintervalle $[-2\pi;0]$. la fonction cosinus est une fonction **périodique**.

- **Variation de la fonction** $\cos$

Daprès la courbe de la fonction $\cos(x)$ sur lintervalle $[-\pi;\pi]$, on observe que la fonction cosinus est croissante sur l'intervalle $[-\pi;0]$, tandis quelle est décroissante sur lintervalle $[0;\pi]$.

En effet, puisque la fonction cosinus est paire, on peut étudier ses variations sur lintervalle $[0;\pi]$.



Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de lintervalle $]0;\pi[$ tels que $x_1 < x_2$ alors $\cos(x_1) > \cos(x_2)$. Donc la fonction cosinus est strictement décroissante sur lintervalle $]0;\pi[$.

On en déduit le tableau des variations suivant :

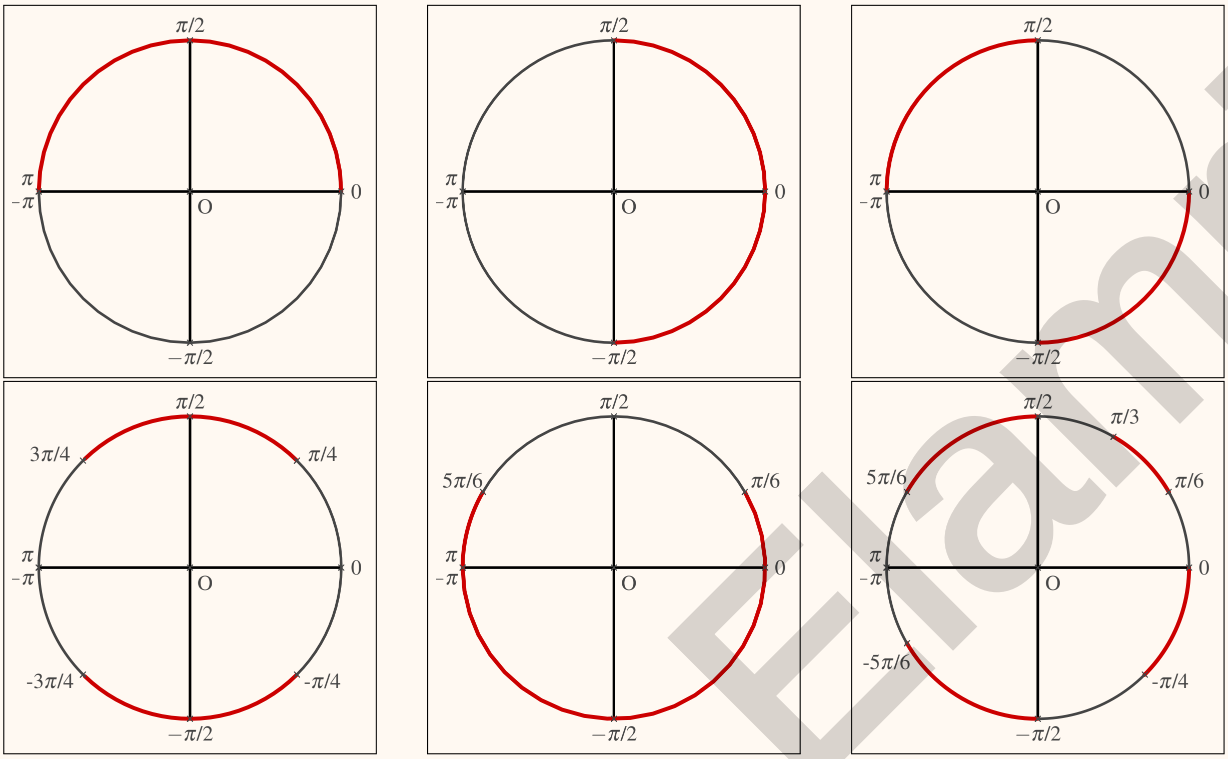
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1

II Equations trigonométriques fondamentales

Activité

(Rapports trigonométriques)

1 Ecrire les réunions dintervalles de $]-\pi;\pi]$ qui représentent les parties du cercle trigonométrique dans les figures ci-dessous.



1. Ecrire les réunions dintervalles de $[0;2\pi]$ qui représentent les parties du cercle trigonométrique dans les figures au-dessus.
2. Ecrire les réunions dintervalles dans $\mathbb{R}$ qui représentent les parties du cercle trigonométrique dans les figures au-dessus.

Définition

Soit a un réel.

Les équations $\sin(x) = a$; $\cos(x) = a$ et $\tan(x) = a$ sont appelées **équations trigonométriques**.

Activité

(Equations et inéquations)

Soit $L =]-\pi;\pi]$, $x \in L$ et $y \in L$.

1. Représenter, sur le cercle trigonométrique, les points d'abscisse curviligne x tel que : $\cos x = \frac{1}{2}$.
2. Soit (Δ_1) une droite d'équation $(\Delta_1) : x = \frac{1}{2}$.
   a. Déterminer l'intersection de (Δ_1) et (C)
   b. Les points de (C) qui situent à gauche de (Δ_1). Qui ce qu'ils représentent ?.

c Les points de (C) qui situent à droite de (Δ_1). Qui ce qu'ils représentent ?.

3 Représenter, sur le cercle trigonométrique, les points d'abscisse curviligne y tel que : $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4 Soit (Δ_2) une droite d'équation $(\Delta_2) : y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a Déterminer l'intersection de (Δ_2) et (C)

b Les points de (C) qui situent à gauche de (Δ_2). Qui ce qu'ils représentent ?.

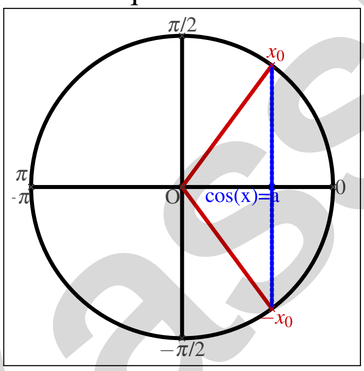
c Les points de (C) qui situent à droite de (Δ_2). Qui ce qu'ils représentent ?.

1 Equation de la forme $\cos x = a$

Propriété

Soit a un réel, et soit S l'ensemble des solutions de l'équation : (E) : $\cos x = a$.

- Si $|a| > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions, donc $S = \emptyset$.
- Si $|a| < 1$ alors il existe un nombre réel $x_0 \in]-\pi;\pi]$ tel que : $a = \cos x_0$, alors l'équation (E) sera (E) : $\cos x = \cos x_0$ et lensemble de solutions est : $S = \{-x_0 + 2k\pi\} \cup \{x_0 + 2k\pi\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.



- Si $a = -1$ alors lensemble de solutions est : $S = \{\pi + 2k\pi\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = 1$ alors lensemble de solutions est : $S = \{2k\pi\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples

- On a : $-1 \leq \cos x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, cest-à-dire que : $|\cos x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc léquation $\cos x = a$ na de solution que si $|a| > 1$.

- Si $|a|<1$ alors il existe un nombre réel $x_0 \in]-\pi;\pi]$ tel que : $a=\cos x_0$:
  - $\cos(x)=\cos(x_0)=\cos(x_0+2k\pi)$ car $\cos(x_0+2k\pi)=\cos(x_0)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

  Donc $x=x_0+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$.
  - $\cos(x)=\cos(x_0)=\cos(-x_0)=\cos(-x_0+2k\pi)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, car $\cos(-x_0)=\cos(x_0)$.

  Donc $x=-x_0+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$.
- Si $a=-1$ alors $\cos(x)=\cos(\pi)$ car $\cos(\pi)=-1$. Donc $x=\pi+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$.
- Si $a=1$ alors $\cos(x)=\cos(0)$ car $\cos(0)=1$. Donc $x=0+2k\pi=2k\pi/k\in\mathbb{Z}$.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ léquation $(E_1)\ :\ \cos x=\frac{1}{2}$.

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$; alors lensemble des solutions de léquation (E_1) dans $\mathbb{R}$ est :

$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$ ou bien $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$. Doù $S_1=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}$ tel que $k\in\mathbb{Z}$.

Exemple

Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation $(E_2)\ :\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- On résout d'abord dans $\mathbb{R}$ léquation $(E_2)\ :\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; alors lensemble des solutions de léquation (E_2) dans $\mathbb{R}$ est :

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$ ou bien $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$. Doù $S'=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}$ tel que $k\in\mathbb{Z}$.

- Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation $(E_2)\ :\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il suffit de trouver les valeurs de k et k' telles que : $-\pi<-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$ et $-\pi<\frac{\pi}{6}+2k'\pi\leq\pi$

Signifie que : $-1<-\frac{1}{6}+2k\leq 1$ et $-1<\frac{1}{6}+2k'\leq 1$

Signifie que : $-\frac{5}{12}<k\leq\frac{7}{12}$ Donc $k=0$ et $-\frac{7}{12}<k\leq\frac{5}{12}$ Donc $k'=0$

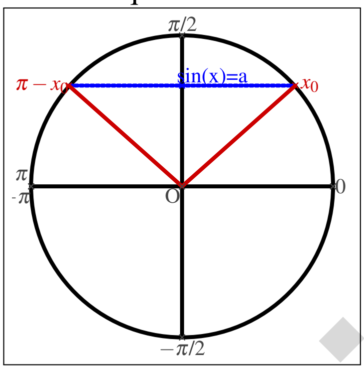
Donc $x_1=-\frac{\pi}{6}$ et $x_2=\frac{\pi}{6}$. Doù l'ensemble des solutions est : $S_2=\left\{-\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6}\right\}$.

2 Equation de la forme $\sin x = a$

Propriété

Soit a un réel, et soit S l'ensemble des solutions de l'équation : $(E)\ :\ \sin x = a$.

- Si $|a| > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions, donc $S = \emptyset$.
- Si $|a| < 1$ alors il existe un nombre réel $x_0 \in]-\pi;\pi]$ tel que : $a = \sin x_0$, alors l'équation (E) sera $(E)\ :\ \sin x = \sin x_0$ et lensemble de solutions est : $S = \{x_0 + 2k\pi\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = -1$ alors lensemble de solutions est :
  $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = 1$ alors lensemble de solutions est : $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.



Exemples

- On a : $-1 \leq \sin x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, cest-à-dire que : $|\sin x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Donc léquation $\sin x = a$ na de solution que si $|a| > 1$.
- Si $|a| < 1$ alors il existe un nombre réel $x_0 \in]-\pi;\pi]$ tel que : $a = \sin x_0$:
  - $\sin(x) = \sin(x_0) = \sin(x_0 + 2k\pi)$ car $\sin(x_0 + 2k\pi) = \sin(x_0)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
  Donc $x = x_0 + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.
  - $\sin(x) = \sin(x_0) = \sin(\pi - x_0) = \sin(\pi - x_0 + 2k\pi)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, car $\sin(\pi - x_0) = \sin(x_0)$
  Donc $x = \pi - x_0 + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$
- Si $a = -1$ alors $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ car $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Donc $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = 1$ alors $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ car $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Donc $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

• Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ léquation (E_1) : $\sin x = \sqrt{2}$.

Comme $\sqrt{2} > 1$; alors léquation (E_1) n'admet pas de solutions. Donc $S_1 = \emptyset$.

• Exemple

Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation (E_2) : $\sin x = -\frac{1}{2}$.

- On résout d'abord dans $\mathbb{R}$ léquation (E_2) : $\sin x = -\frac{1}{2}$.

On sait que $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$; alors lensemble des solutions de léquation léquation (E_2) dans $\mathbb{R}$ est :

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ ou bien $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$. Doù $S' = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

- Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation (E_2) : $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Il suffit de trouver les valeurs de k et k' telles que : $-\pi < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ et $-\pi < 7\frac{\pi}{6} + 2k'\pi \leq \pi$

Signifie que : $-1 < -\frac{1}{6} + 2k \leq 1$ et $-1 < \frac{7}{6} + 2k' \leq 1$

Signifie que : $-\frac{5}{12} < k \leq \frac{7}{12}$ Donc $k = 0$ et $-\frac{13}{12} < k \leq -\frac{1}{12}$ Donc $k' = -1$

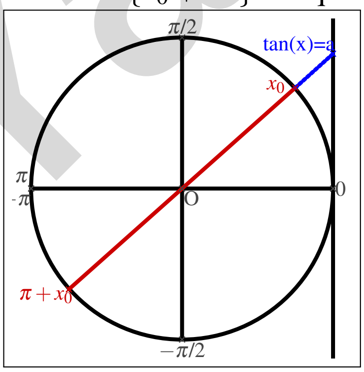
Donc $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ et $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$. Doù l'ensemble des solutions est : $S_2 = \left\{-\frac{5\pi}{6}\ ;\ -\frac{\pi}{6}\right\}$.

3 Equation de la forme $\tan x = a$

Propriété

Soit a un réel, et soit S l'ensemble des solutions de l'équation : (E) : $\tan x = a$.

Il existe un nombre réel $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $a = \tan x_0$, alors l'équation (E) sera (E) : $\tan x = \tan x_0$ et lensemble de solutions est : $S = \{x_0 + k\pi\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.



• Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ léquation $(E_1)\ :\ \tan x = -1$.

Léquation (E_1) est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

On a $\tan x = -1$; signifie que $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Donc $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; c'est-à-dire $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

Comme $-\frac{\pi}{4} + k\pi \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi$ où $k, k' \in \mathbb{Z}$. Alors $S_1 = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} / k \in \mathbb{Z}$.

• Exemple

Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation $(E_2)\ :\ \tan x = \sqrt{3}$.

- On résout d'abord dans $\mathbb{R}$ léquation $(E_2)\ :\ \tan x = \sqrt{3}$.

Léquation (E_2) est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

Alors $\tan x = \sqrt{3}$; équivaut à $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$. Donc $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$; c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

Comme $\frac{\pi}{3} + k\pi \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi$ où $k, k' \in \mathbb{Z}$. Alors $S' = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi\right\} / k \in \mathbb{Z}$.

- Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation $(E_2)\ :\ \tan x = \sqrt{3}$.

Il suffit de trouver les valeurs de k telle que : $-\pi < \frac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$ Signifie que : $-1 < \frac{1}{3} + k \leq 1$

Signifie que : $-\frac{4}{3} < k \leq \frac{2}{3}$ Donc $k = -1;0$

Donc $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$ et $x_2 = \frac{\pi}{3}$. Doù l'ensemble des solutions est : $S_2 = \left\{-\frac{2\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right\}$.

III Inéquations trigonométriques fondamentales

Définition

Soit a un réel.

Les inéquations $\sin(x) \geq a$; $\cos(x) \geq a$ et $\tan(x) \geq a$ sont appelées **inéquations trigonométriques**.

De même si on a l'un des symboles $>$; $<$ et $\leq$ au lieu de $\geq$.

T **Théorème**

Soit a un réel, Si $a > 1$ alors :

- Les inéquations $\sin(x) \geq a$; $\cos(x) \geq a$; $\sin(x) > a$ et $\cos(x) > a$ n'ont pas de solutions .
- L'ensemble des solutions des inéquations $\sin(x) \leq a$; $\cos(x) \leq a$; $\sin(x) < a$ et $\cos(x) < a$ est $\mathbb{R}$

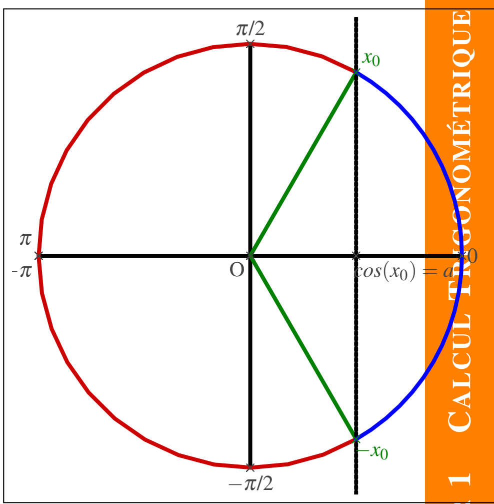
Si $a < 1$ alors :

- Les inéquations $\sin(x) \leq a$; $\cos(x) \leq a$; $\sin(x) < a$ et $\cos(x) < a$ n'ont pas de solutions .
- L'ensemble des solutions des inéquations $\sin(x) \geq a$; $\cos(x) \geq a$; $\sin(x) > a$ et $\cos(x) > a$ est $\mathbb{R}$

1 Inéquation de la forme $\cos x \geq a$ ou $\cos x \leq a$

Soit a un réel.

▶ Si $a = 1$ alors :



- Lensemble des solutions de linéquation $\cos x \geq 1$ est

  $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- linéquation $\cos x > 1$ n'a pas de solutions.
- Lensemble des solutions de linéquation $\cos x \leq 1$ est $S = \mathbb{R}$
- Lensemble des solutions de linéquation $\cos x < 1$ est

  $S = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

▶ Si $a = -1$ alors :

- Lensemble des solutions de linéquation $\cos x \geq -1$ est $S = \mathbb{R}$.
- Lensemble des solutions de linéquation $\cos x > -1$ est

  $S = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- Lensemble des solutions de linéquation $\cos x \leq -1$ est $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- linéquation $\cos x < -1$ n'a pas de solutions.

▶ Si $|a| < 1$ alors il existe un réel $x_0 \in]-\pi; \pi]$ tel que : $\cos x_0 = a$ (on utilise le cercle trigonométrique).

- $\cos x \geq \cos x_0$ si et seulement si $-x_0 + 2k\pi \leq x \leq x_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x > \cos x_0$ si et seulement si $-x_0 + 2k\pi < x < x_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

- $\cos x \leq \cos x_0$ si et seulement si $x \in \left]-\pi+2k\pi; -x_0+2k\pi\right] \cup \left[x_0+2k\pi; \pi+2k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x < \cos x_0$ si et seulement si $x \in \left]-\pi+2k\pi; -x_0+2k\pi\right[\cup \left]x_0+2k\pi; \pi+2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

• Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ linéquation (I_1) : $\cos x \leq -\sqrt{3}$.

Comme $-\sqrt{3} < -1$; alors linéquation (I_1) n'admet pas de solutions, dons $S_1 = \emptyset$.

• Exemple

Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ linéquation (I_2) : $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

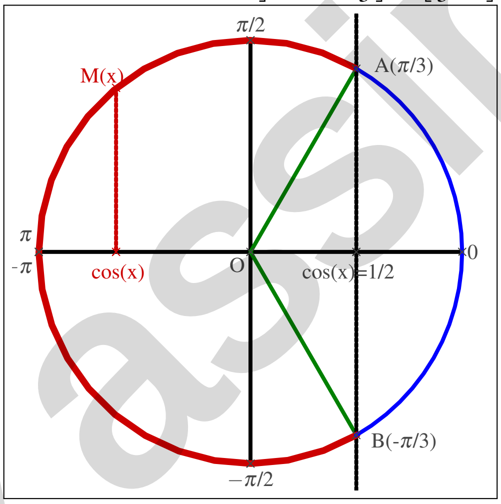
- On résout d'abord dans $]-\pi;\pi]$ léquation (E_2) : $\cos x = \frac{1}{2}$.

On sait que $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; alors $S' = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$.

- Sur le cercle trigonométrique, on considère les deux points $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $B\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Notons quen se référant à la figure ci-contre, lensemble des solutions est lensemble des abscisses curvilignes des points $M(x)$ représentés sur larc rouge du cercle trigonométrique (C) tel que $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

Donc lensemble des solutions de linéquation (I_2) sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est : $S_2 = \left]-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

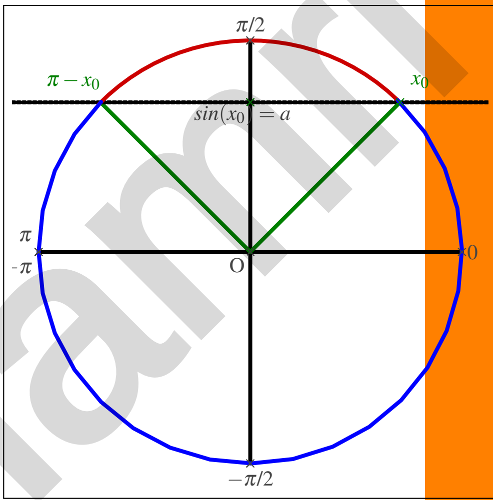


2 Inéquation de la forme $\sin x \geq a$ ou $\sin x \leq a$

Soit a un réel.

▶ Si $a = 1$ alors :

- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x \geq 1$ est
  $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- linéquation $\sin x > 1$ n'a pas de solutions.
- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x \leq 1$ est $S = \mathbb{R}$
- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x < 1$ est
  $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.



▶ Si $a = -1$ alors :

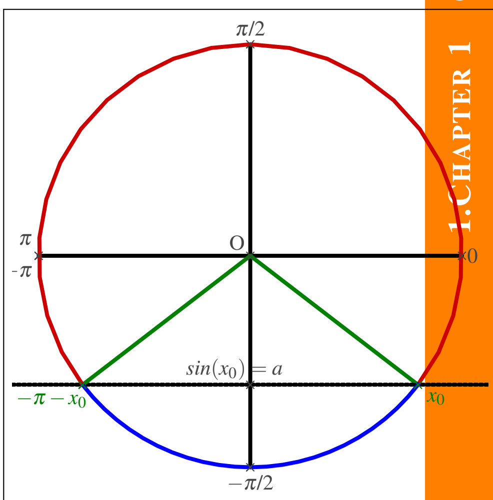
- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x \geq -1$ est $S = \mathbb{R}$.
- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x > -1$ est
  $S = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x \leq -1$ est $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- linéquation $\sin x < -1$ n'a pas de solutions.

▶ Si $0 \leq a < 1$ alors il existe un réel $x_0 \in [0; \pi]$ tel que : $\sin x_0 = a$ (on utilise le cercle trigonométrique).

- $\sin x \geq \sin x_0$ alors $S = [x_0 + 2k\pi; \pi - x_0 + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x > \sin x_0$ alors $S =]x_0 + 2k\pi; \pi - x_0 + 2k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x \leq \sin x_0$ alors $S = [0 + 2k\pi; x_0 + 2k\pi] \cup [\pi - x_0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x < \sin x_0$ alors $S = [0 + 2k\pi; x_0 + 2k\pi[\cup]\pi - x_0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

▶ Si $-1 < a \leq 0$ alors il existe un réel $x_0 \in]-\pi; 0]$ tel que : $\sin x_0 = a$ (on utilise le cercle trigonométrique).

- $\sin x \geq \sin x_0$ alors, pour $k \in \mathbb{Z}$
  $S =]-\pi + 2k\pi; -\pi - x_0 + 2k\pi] \cup [x_0 + 2k\pi; 0 + 2k\pi]$.
- $\sin x > \sin x_0$ alors, pour $k \in \mathbb{Z}$
  $S =]-\pi + 2k\pi; -\pi - x_0 + 2k\pi[\cup]x_0 + 2k\pi; 0 + 2k\pi]$.
- $\sin x \leq \sin x_0$ alors $S = [-\pi - x_0 + 2k\pi; x_0 + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x < \sin x_0$ alors $S =]-\pi - x_0 + 2k\pi; x_0 + 2k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



• Exemple

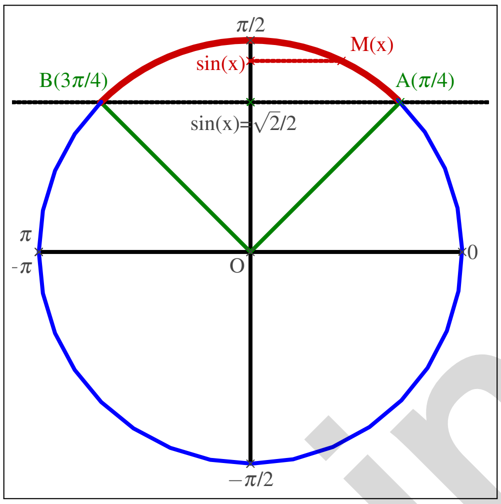
Résolvons dans $\mathbb{R}$ linéquation $(I)\ :\ \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- On résout d'abord dans $\mathbb{R}$ léquation $(E)\ :\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; alors $S' = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

- Sur le cercle trigonométrique, on considère les deux points $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $B\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Notons quen se référant à la figure ci-contre, lensemble des solutions est lensemble des abscisses curvilignes des points $M(x)$ représentés sur larc rouge du cercle trigonométrique (C) tel que $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

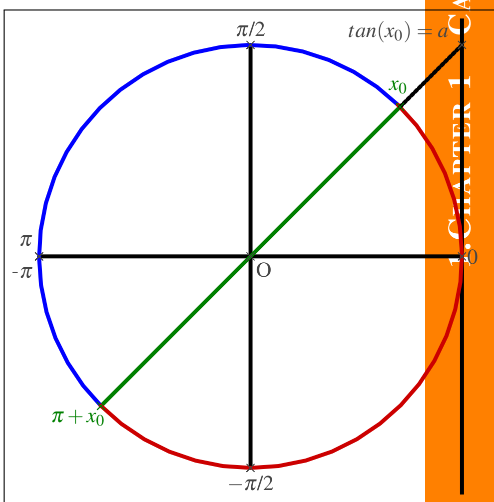


Donc lensemble des solutions est : $S = \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

3 Inéquation de la forme $\tan x \geq a$ ou $\tan x \leq a$

Soit a un réel, il existe un réel x_0 tel que : $\tan x_0 = a$ et $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

- $\tan x \geq \tan x_0$ si et seulement si $x_0 + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x > \tan x_0$ si et seulement si $x_0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x \leq \tan x_0$ si et seulement si $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq x_0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x < \tan x_0$ si et seulement si $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < x_0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



Activité

(Angles Inscrits)

Soient (C) un cercle du centre O, A et B deux points distincts de (C) tels que le segment $[AB] < \Phi$ (avec Φ le diamètre du cercle (C)).

Soit M un point du cercle (C) tel que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.

1. Montrer que : $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ dans les cas suivants :
   a. Les points A , O et M sont alignés.
   b. Les points A , O et M ne sont pas alignés (on considère N de (C) tel que N , O et M sont alignés).
2. Soit (AT) la tangente du cercle (C), les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BAT}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$. Montrer que : $\widehat{AOB} = 2\widehat{BAT}$.

IV Les angles inscrits - les quadrilatères inscriptibles

1 Angle inscrit - Angles au centre

Définition

- Un angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle.
- Un angle inscrit est un angle dont le sommet est sur le cercle et les côtés de langle coupent le cercle.

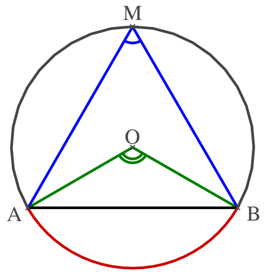
• Exemple

Soit (C) un cercle de centre O, $\overset{\frown}{AB}$ un arc de (C) tel que $[AB]$ nest pas le diamètre de (C) .

Langle $\widehat{AMB}$ intercepte larc $\overset{\frown}{AB}$ avec $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit.

Langle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre intercepte larc $\overset{\frown}{AB}$.

Alors $\widehat{AOB} = 2.\widehat{AMB}$



Activité

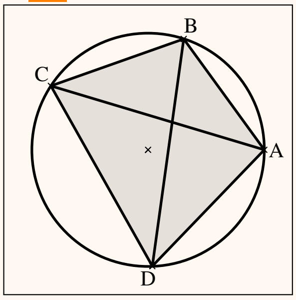
(Quadrilatère Inscriptibles)

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible (cest-à-dire inscrit dans le cercle (C)).

1 a Montrer que : $\hat{A} = \widehat{DAC} + \widehat{BDC}$ et $\hat{C} = \widehat{DCA} + \widehat{ADB}$.

b En déduire que : $\hat{A} + \hat{C} = \pi$ et $\sin\hat{A} = \sin\hat{C}$.

2 Montrer de même que : $\hat{B} + \hat{D} = \pi$ et $\sin\hat{B} = \sin\hat{D}$.



2 Propriétés

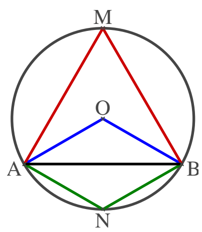
Propriété

- La mesure de langle inscrit est la moitié de celle de langle au centre qui intercepte le même arc.
- Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure ou ils sont supplémentaires.

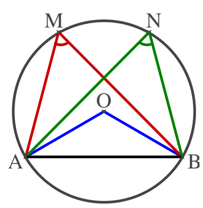
• Exemple

$\widehat{ANB} + \widehat{AMB} = \pi$

Donc $\widehat{ANB} = \pi - \frac{1}{2}.\widehat{AOB}$.



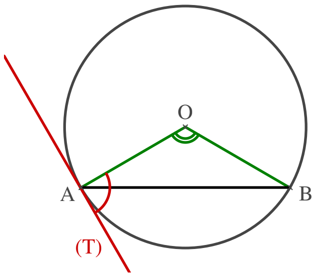
$\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$



Propriété

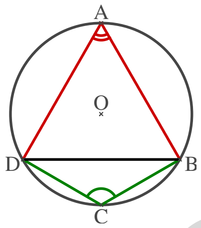
Si la droite (AT) est la tangente du cercle (C) en A, alors :

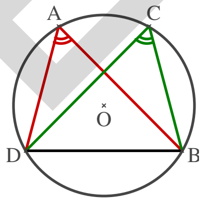
$$\widehat{AOB} = 2.\widehat{BAT}$$



Propriété

- Un quadrilatère est inscriptible si et seulement si deux angles opposés sont égaux ou supplémentaires.
- ABC est un triangle inscrit dans le cercle (C) et D un point dans le plan.





Le point D appartient au cercle (C) si et seulement si $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ ou $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$

3 Les relations trigonométriques dans un triangle

Activité

(Relations trigonométriques)

Soit ABC un triangle, on pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

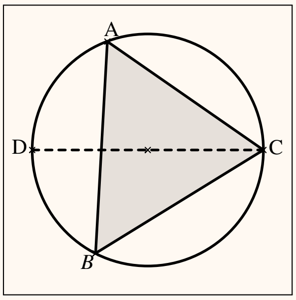
1 Montrer que si ABC est un triangle rectangle en A , alors : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$

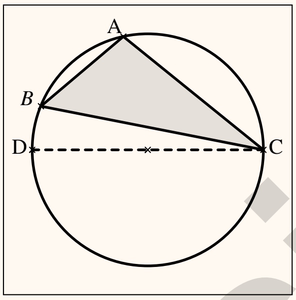
2 On suppose, à présent, que tous les angles de ABC sont aigus. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC, et D le point de (C) diamétralement opposé à C (voir figure).

a Montrer que : $\sin\hat{A} = \sin\widehat{BDC}$ et $\sin\widehat{BDC} = \dfrac{a}{DC}$.

b Soit R le rayon du cercle (C). Déduire que : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = 2R$.

c Montrer la relation : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$.





3 On suppose, maintenant, que lun des angles du triangle ABC est obtus, soit $\hat{A}$ cet angle.

a En utilisant les résultats de lactivité précédente, montrer que : $\sin\widehat{BDC} = \dfrac{a}{DC}$ (où D est le point de (C) diamétralement opposé à C).

b Montrer la relation : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$.

Activité

(Relations trigonométriques)

ABC est un triangle tel que $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ et S est laire du triangle ABC.

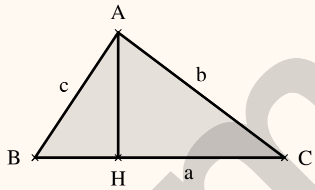
1 On suppose que les angles de ABC sont aigus. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

a Montrer que : $AH = \dfrac{2S}{a} = b\sin\hat{C}$

En déduire que : $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\hat{C}$.

b De même, montrer que :

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin\hat{A}$ et $S = \dfrac{1}{2}ac\sin\hat{B}$.



c Si R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, déduire que : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = \dfrac{abc}{2S}$ et $abc = 4R$.

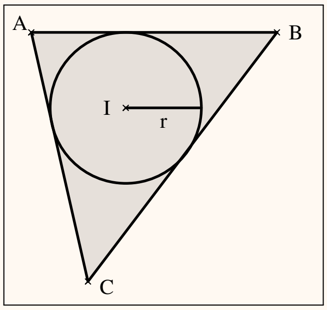
2 Etudier les questions précédentes dans le cas où ABC est un triangle rectangle en C, puis dans le cas où langle $\hat{A}$ est obtus.

Activité

(Relations trigonométriques)

Soient ABC un triangle, I et r sont le centre et le rayon respectifs de son cercle inscrit. Soit S laire du triangle ABC. On pose : $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Soit p le demi-périmètre du triangle ABC $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$.

Montrer que : $S = pr$.



Propriété

ABC est un triangle tel que $a = BC$; $b = AC$ et $c = AB$. Soient S et p laire et le périmètre respectives du triangle ABC $(p = a+b+c)$, R et r sont les rayons respectives du cercle circoscrit au triangle ABC et du cercle inscrit dans le triangle ABC. On a :

- $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$
- $abc = 4RS$
- $S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$
- $S = \frac{1}{2}pr$