Chapitre

Dérivation

Exercice

Étudier la dérivabilité de f au point a dans chacune des cas suivantes :

1. $\begin{cases} f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et $a = 0$
2. $f(x) = (x-2)E(x)$ et $a = 2$
3. $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ et $a = 1$
4. $\begin{cases} f(x) = \lvert x^2 - x\rvert & ; x < 0 \\ f(0) = x\sqrt{x} & ; x \geq 0 \end{cases}$ et $a = 0$

Exercice

1. Determiner la fonction affine tangente de la fonction $f(x) = \tan(x)$ au point 0 puis donner des valeurs approximatives de $f(0,01)$ et $f(-0,01)$.
2. Déterminer la fonction affine tangente a la fonction $g(x) = x^3 - x$ au point 2 puis donner une valeur approximative de $g(2,001)$.
3. On considère la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$
Déterminer a et b sachant que la droite d'équation : $y = 4x+3$ est tangente à la courbe (C_h) en $A(0,3)$.

Exercice

Calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé l'ensemble de définition de f et f' :

1. $f(x) = x^5 - 2x^2 + 1$
2. $f(x) = \cos x + \sin x$
3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
4. $f(x) = \tan x + x^2 + x$
5. $f(x) = (x+\sqrt{x})^3$
6. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$
7. $f(x) = \sqrt{x}(1+\cos x)$
8. $f(x) = (x\tan x)^4$
9. $f(x) = \cos^2 x + \sin^3 x$
10. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-3x+2}$
11. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$
12. $f(x) = \dfrac{2\tan x - 1}{1-\tan x}$
13. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$
14. $f(x) = \sqrt{2x+1}$
15. $f(x) = \sqrt{x^2-x}$
16. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-2}$

Exercice

En utilisant la notion du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{x\sin x}{x-\pi}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(x+1)^3\cos x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{2018}-1}{x}$

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{-x^2+2x+1}{x+1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f sur D_f.
4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=|x|\cos(3x)$

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f en $x_0=0$ puis interpréter les résultats géométriquement
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.
3. Écrire l'équation de la tangente à la courbe (C_f), au point $A\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.

Exercice

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2-x}};x\leq 0 \\ g(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1};x>0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f au point 0 puis interpréter le résultat géométriquement.
3. Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.
4. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ puis donner le tableau de variations de la fonction g.

Exercice

Partie A : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = 2x + \sqrt{4x^2+1}$.

1. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad g(x) \cdot g(-x) = 1$.
2.
   a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \qquad g(x) > 0$.
   b. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^-) \qquad g(x) > 0$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}$
et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2.
   a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{4x^2+1}}$
   b. En déduire le tableau de variations de f.
   c. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

Exercice

1. Soit x un réel positif. Montrer les inégalités suivantes :
   a. $\sin x \leq x$
   b. $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$
   c. $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$
   d. $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
2. En déduire que :
   a. $\forall x \in \mathbb{R};\ 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
   b. $\forall x \in \mathbb{R}_-; x \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6}$
3. Montrer que pour tous a et b de $\mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}$