Dérivation et ses applications

Contenu du programme	Capacités attendues	recommandations pédagogiques
• Dérivabilité en un point ; nombre dérivé ; interprétation géométrique ; tangente à une courbe ; approximation d'une fonction dérivable par une fonction affine en un point ; • Dérivabilité à droite ; dérivabilité à gauche ; interprétation géométrique et, demi-tangente ; tangente ou demi- tangente verticale ; point anguleux ; • Dérivabilité sur un intervalle ; dérivée première ; dérivée seconde ; dérivées successives ; • Dérivation de $f+g$; kf ; $f\times g$; $\frac{1}{f}$; $\frac{f}{g}$; $f^n(n\in\mathbb{N}^*)$; $f(ax+b)$ et $\sqrt{f}$; •Equation différentielle : $y''+w^2y=0$	• Approcher une fonction au voisinage d'un point ; • Reconnaitre que le nombre dérivée de la fonction en x_0 est le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point dabscisse x_0 ; • Reconnaitre les dérivées des fonctions de référence ; • Maitriser les techniques de calcul de la dérivée de fonctions ; • Déterminer une équation de la tangente à une courbe en un point et construire cette tangente ; • Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de létude du signe de sa dérivée ; • Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa courbe représentative ; • Résoudre des problèmes concernant des valeurs minimales et des valeurs maximales ; •Appliquer la dérivation dans le calcul de certaines limites ;	•Parmi les exemples à traiter ;On approchera les fonctions : $h\longmapsto(1+h)^2$; $h\longmapsto(1+h)^3$; $h\longmapsto\frac{1}{1+h}$ et $h\longmapsto\sqrt{1+h}$ par des fonctions affines au voisinage de 0 • On utilisera $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}$ pour déterminer la dérivée de chacune des fonctions $x\longmapsto\cos(x)$ et $x\longmapsto\sin(x)$ • On démontrera les résultats : - Si f est une fonction constante sur in intervalle I alors f' est nulle sur I - Si f est une fonction dérivable et croissante sur un intervalle I alors f' est positive sur I - Si f est une fonction dérivable et décroissante sur un intervalle I alors f' est négative sur I • On admettra les propriétés réciproques dans le cas où f est dérivable ; •On admettra la solution générale de léquation différentielle :$y''+w^2y=0$

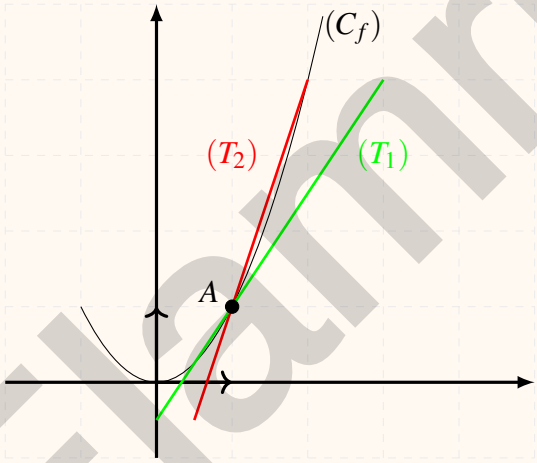
Yassine Elamri

I Dérivabilité d'une fonction en un point

Activité

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2$; et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$
2. Montrer que la droite (T) passant par le point $A(1, f(1))$ et de coefficient directeur 2 a pour équation : $y = 2x - 1$
3. Tracer la droite (T) dans la figure ci-contre.



(T_1) : *Droite de coefficient directeur* 1.5

(T_2) : *Droite de coefficient directeur* 3

1 Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

le réel l est appelé **le nombre dérivé** de f en a, on le note $f'(a)$.

Application

Montrer que la fonction f est dérivable en a et déterminer $f'(a)$ dans chacun des cas ci-après :

1. $f(x) = x^2$; $a = \sqrt{2}$
2. $f(x) = x^3$; $a = 1$

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

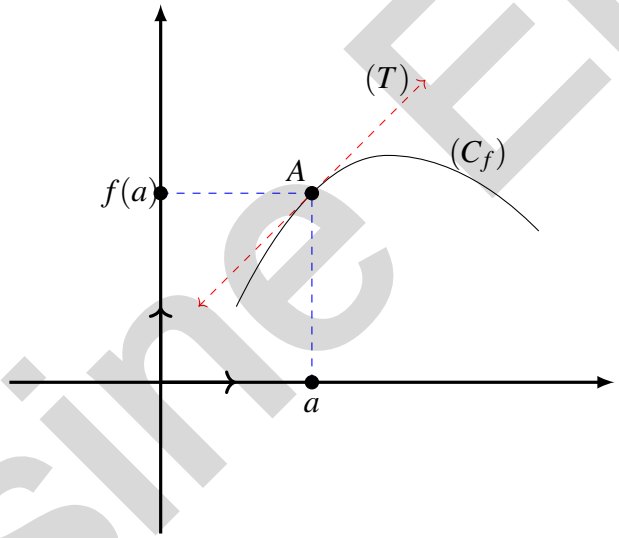
2 Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intevalle I et dérivable en un réel a appartenant à I.

1. la tangent à la courbe représentative de la fonction f au point $A(a, f(a))$ et la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.
2. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$



$$(T) : y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Application

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1-x^2$

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1.

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

3 Dérivabilité à droite / à gauche en un point

Définition

1 Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;a+\alpha[$ tel que $\alpha>0$. On dit que la fonction f est **dérivable à droite en** a s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$
le réel l est appelé le nombre dérivé de f à droite en a, on le note $f'_d(a)$

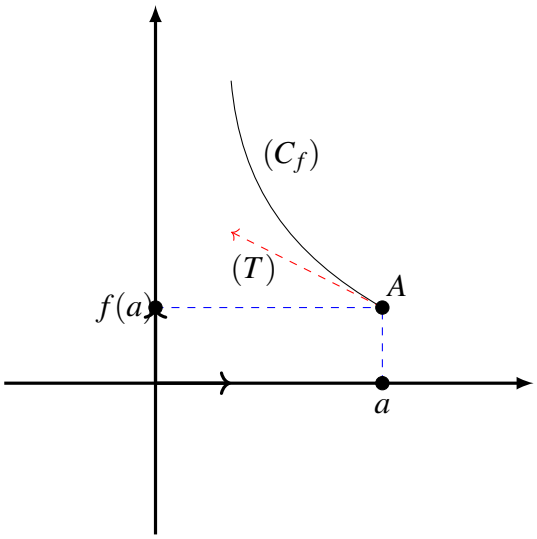
2 Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha;a]$ tel que $\alpha>0$. On dit que la fonction f est **dérivable à gauche en** a s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$
le réel l est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a, on le note $f'_g(a)$

a Interprétation géométrique :

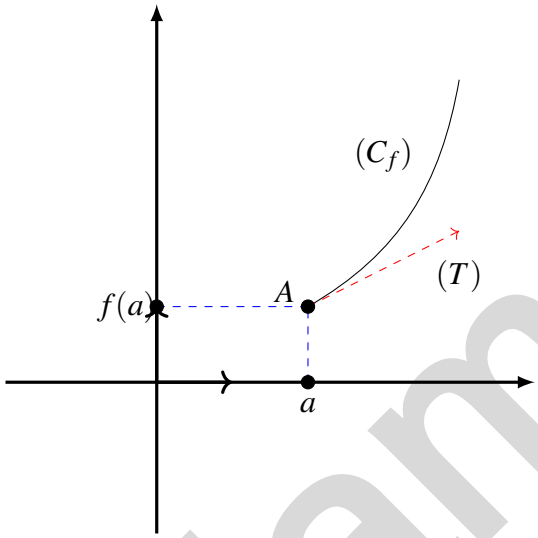
si f une fonction dérivable à droite (ou à gauche) en a alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente au point $A(a,f(a))$ de coefficient directeur le nombre dérivé $f'_d(a)$ (ou $f'_g(a)$).

Yassine Elamri

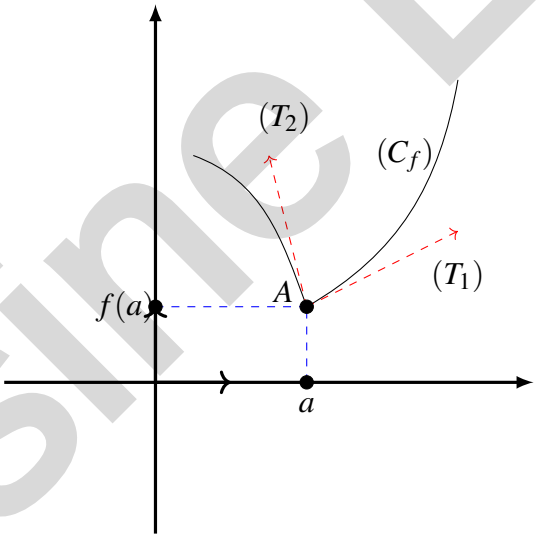
Yesterday better than today, tomorrow better than today



$$(T): \begin{cases} y = f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$



$$(T): \begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$



$$\begin{cases} (T_1): y = f'_d(a)(x-a)+f(a)\ ;\ x \geq a \\ (T_2): y = f'_g(a)(x-a)+f(a)\ ;\ x \leq a \end{cases}$$

Application

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |1-x|$. étudier la dérivabilité de f en 1.

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

Propriété

Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I et a un élément de I.

On dit que la fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a)=f'_g(a)$.

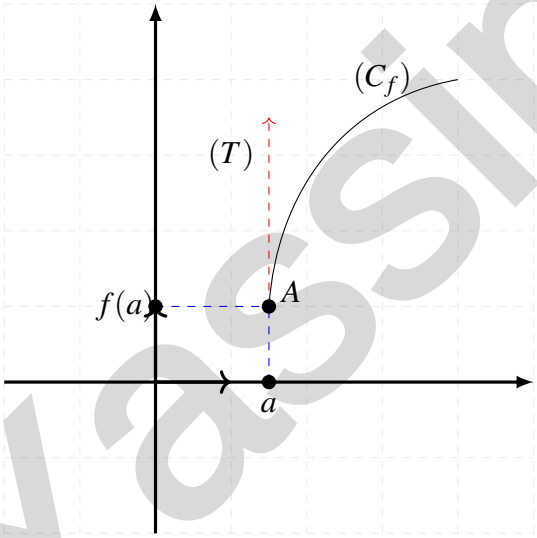
4 Demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées

1. Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet à droite au point d'abscisse a, **une demi-tangente verticale** dirigée vers le haut.

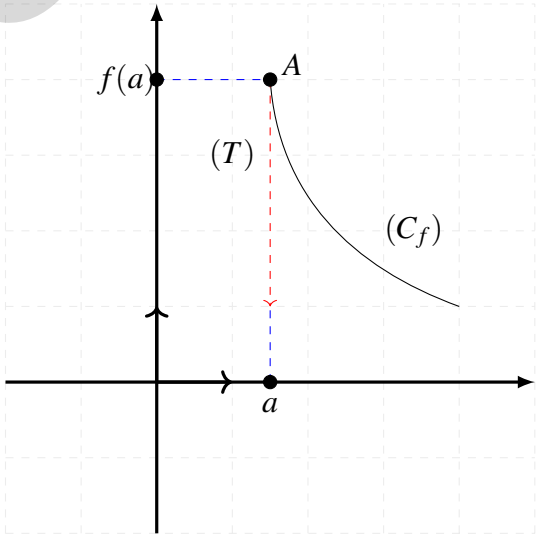
2. Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet à droite au point d'abscisse a, **une demi-tangente verticale** dirigée vers le bas.

3. Si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet à gauche au point d'abscisse a, **une demi-tangente verticale** dirigée vers le haut.

4. Si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet à gauche au point d'abscisse a, **une demi-tangente verticale** dirigée vers le bas.



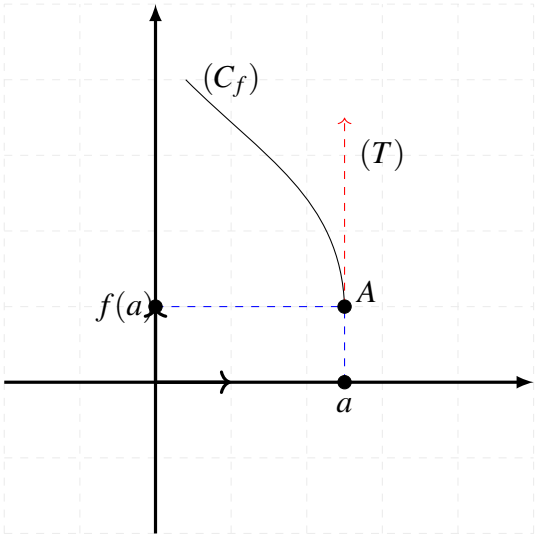
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$$



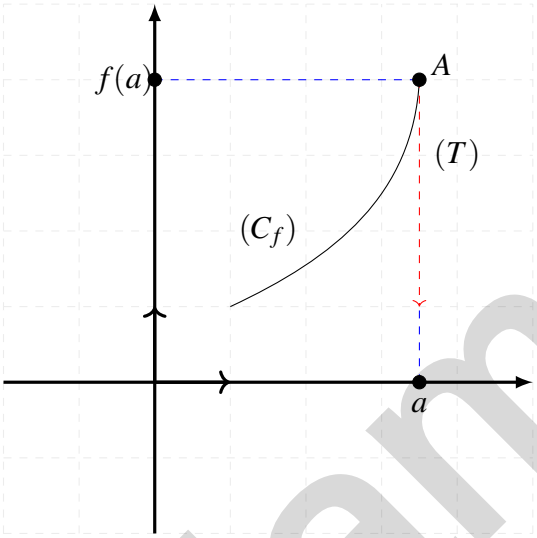
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today



$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$



$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$$

Application

Soit f une fonction définie sur $[-2;2]$ par : $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

1 Montrer que f n'est pas dérivale à gouche en 2. Interpréter géométriquement le résultat.

2 Montrer que f n'est pas dérivale à droite en -2. Interpréter géométriquement le résultat.

5 Approximation locale d'une fonction par une fonction affine

Définition

Soit f une fonction définie sur un intevalle I et dérivable en un réel a appartenant à I.

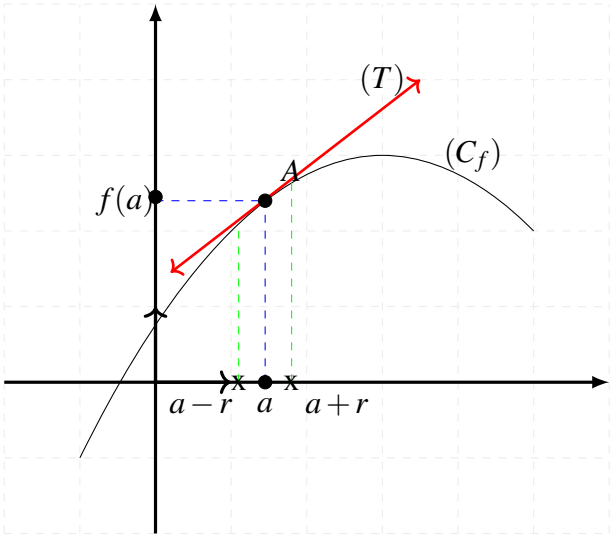
1 La fonction $x\longmapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ est appelée la fonction affine tangente de f en a.

2 Une approximation affine de la fonction f au voisinage de a est donnée par :

$$f(x)\approx f'(a)(x-a)+f(a)$$

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today



Au voisinage de a , la courbe (C_f) et la droite (T) se confondent, d'où :

$$f(x) \approx f'(a)(x-a)+f(a)$$

Application

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)^2$

1. Montrer que f est dérivable en $a=0$ et en $b=1$.
2. Expliciter les fonctions tangentes de f en a et en b.
3. donner une approximation affine de chacun des réels $(1.0004)^2$ et $(2.00001)^2$.

II Dérivavilité d'une fonction sur un intervalle - fonctions dérivées

1 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soient a et b deux réels tels que $a<b$.

1. On dit que une fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a;b[$.
2. On dit que une fonction f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a;b]$ si elle est dérivable :
   - a. En tout point de l'intervalle ouvert $]a;b[$.
   - b. A droite en a.
   - c. A gauche en b.
3. On définit de façon analogue la dérivabilité d'une fonction sur les intervalles $[a;b[$ et $]a;b]$.

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x un élément de I. On appelle la dérivée de f la fonction, notée f', qui à pour tout x de I associe $f'(x)$ le nombre dérivé de f en x.

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

2 Dérivées des fonctions usuelles

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans son domaine de définition et f' sa dérivée. Le tableau ci-dessous donne la dérivée des fonctions les plus courantes :

Fonction $f(x) =$	Dérivée $f'(x) =$	f est définie sur	f est dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$	
x	1	$\mathbb{R}$	
$ax, a \in \mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$	
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$	$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi / (k \in \mathbb{Z}) \right\}$	

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

3 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. les fonctions $u+v$, uxv et kxu sont dérivables sur l'intervalle I, et on a pour tout x de I.

1. $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$.
2. $(u\times v)'(x) = u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$.
3. $(k.u)'(x) = k.u'(x)$. Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I, et on a pour tout x de I.
4. $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$.
5. $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$.

Application

Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

1) $f(x)=3$ 2) $f(x)=3x$ 3) $f(x)=\frac{5}{2}x$ 4) $f(x)=x^2$

5) $f(x)=x^7$ 6) $f(x)=2x^3$ 7) $f(x)=3x+2$ 8) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

9) $f(x)=-x^2+x-\frac{7}{2}$ 10) $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ 11) $f(x)=\frac{-x^2-x+1}{x+1}$ 12) $f(x)=\frac{4}{x}$

13) $f(x)=2x^5-\frac{x^3}{3}$ 14) $f(x)=(3x+2)x^2$ 15) $f(x)=(-2x+1)(x+1)$ 16) $f(x)=\frac{-1}{x+1}$

17) $f(x)=3\cos(x)$ 18) $f(x)=\cos^2(x)$ 19) $f(x)=\sin(2x+1)$ 20) $f(x)=x\sin(x^2+1)$

Conséquences

1. Toute fonction polynôme est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction rationnelle est dérivable en tout point où elle est définie.

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

4 Dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$

Propriété

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

Si u est strictement positive et dérivable sur I alors la fonction $\sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I), \left(\sqrt{u}\right)'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Application

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+2} \qquad et \qquad g(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$

1. Monter que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.
2. Monter que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.

5 Dérivée de la fonction $x \longmapsto (u(x))^n$

Propriété

Soit n un entier naturel non nul.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction u^n est dérivable sur I, et on a :

$$\forall x \in I, ((u(x))^n)' = n.u'(x).(u(x))^{n-1}$$

Application

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \sqrt{2}x - \frac{\pi}{3}\right)^7 \quad et \quad g(x) = \left(\frac{x}{x^4+1}\right)^5$$

1. Monter que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.
2. Monter que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

6 Dérivée de la fonction $x \longmapsto u(ax+b)$

Propriété

Soient a et b deux réels, et u est une fonction dérivable sur un intervalle J.

La fonction $x \longmapsto u(ax+b)$ est dérivable sur tout intervalle I tel que pour tout x de I on a $(ax+b) \in J$

Application

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \cos\left(2x-3\right)$ *et* $g(x) = \sin\left(-\sqrt{3}x+1\right)$

1 Monter que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.

2 Monter que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.

Conséquences

Fonction $f(x) =$	Dérivée $f'(x) =$	f est définie sur	f est dérivable sur
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	
$\tan(ax+b)$	$a\left(1+\tan^2(ax+b)\right)$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/(k\in\mathbb{Z})\right\}$	

7 Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée sur I.

1 Si f' est dérivable sur I, alors sa fonction dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée dérivée seconde (ou dérivée dordre 2) de la fonction f.

2 Par itération, pour tout naturel $n \geq 2$, on définit la fonction dérive d'ordre n , notée $f^{(n)}$, comme étant la fonction dérivée de la fonction dérivée dordre $(n-1)$, et on a :

$$\left(f'\right)' = f^{(2)} \ ; \ \left(f^{(2)}\right)' = f^{(3)} \ ; \ \ldots \ ; \ \left(f^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}$$

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

Application

Déterminer les dérivées dordre 1, 2 et 3 de la fonction f dans chacun des cas ci-après :

1. $f(x) = x^3 + x^2$
2. $f(x) = \cos(2x) - \sin\left(x^2\right)$

III Applications

1 Sens de variations dune fonction

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. La fonction f' est positive sur I si et seulement si la fonction f est croissante sur I..
2. La fonction f' est négative sur I si et seulement si la fonction f est décroissante sur I.
3. La fonction f' est nulle sur I si et seulement si la fonction f est constante sur I.

Remarque

- Si la fonction f' est strictement positive sur I (sauf en un nombre fini de points) alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si la fonction f' est strictement négative sur I (sauf en un nombre fini de points) alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^3$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
3. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Yassine Elamri

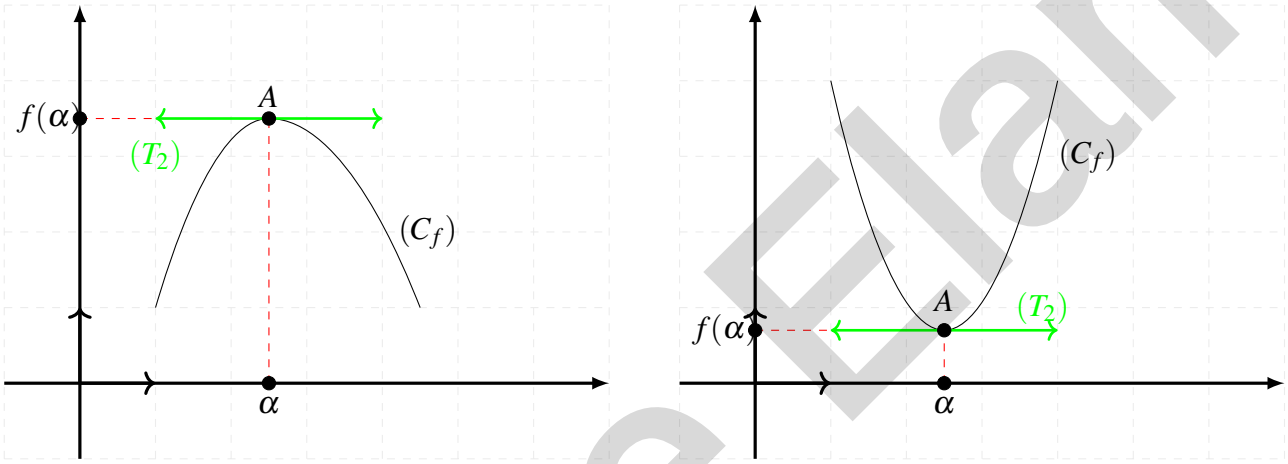
Yesterday better than today, tomorrow better than today

2 Extremums d'une fonction sur un intervalle

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition et α un élément de I.

Si f admet un extremum en α alors $f'(\alpha) = 0$. En particulier, la tangente à la courbe représentative de f au point $(\alpha; f(\alpha))$ a pour pente $f'(\alpha) = 0$: c'est donc une droite horizontale.



Remarque

La propriété précédente se voit directement sur le tableau de variations, en effet :

- Un minimum local correspond au cas où la dérivée s'annule en α et un peu avant la dérivée est négative (donc la fonction est décroissante) et un peu après α la dérivée est positive (donc la fonction est croissante .
- Le cas d'un maximum local est similaire : la dérivée s'annule aussi, mais elle est positive avant α et négative après.

Corolaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition et α un élément de I.

Si f' s'annule et change le signe en α alors f admet un extremum en α.

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x - x^3$

1 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que f admet un extremum sur chacun des intervalles $\left[-\frac{3}{2};0\right]$ et $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

3 Équation différentielle du type $y'' + w^2y = 0$

Définition

Soit w un réel non nul.

1 L'équation $y'' + w^2y = 0$, où l'inconnue y est fonction, est appelée **équation différentielle linéaire du second ordre** à coefficients constants.

2 Toute fonction f dérivable deux foix sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f'' + w^2 f = 0$ est appelée solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + w^2y = 0$.

Propriété

Soit w un réel non nul. Lensemble des solutions de l'équation $y'' + w^2y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto A\cos(wx) + B\sin(wx)$$

où A et B sont deux réels quelconques.

Remarque

• On peut aussi écrire la solution générale de léquation $y'' + w^2y = 0$ sous la forme :

$$x \longmapsto A\cos(wx + B) \quad ou \quad x \longmapsto A\sin(wx + B)$$

où A et B sont deux réels quelconques.

Application

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1 $y'' + 9y = 0$

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

2 $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2}+2u(t)=0$

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today