Chapitre

Intégration

I Intégrale d'une fonction continue :

D Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, avec a et b deux réels.
On appelle l'intégrale de f de a à b, notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, le nombre réel $F(b)-F(a)$, où F est une fonction primitive quelconque de f sur $[a,b]$. On écrit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

Remarque

1. Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On note aussi : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.
3. La variable x est dite «muette». On peut donc la remplacer par n'importe quel autre nom :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \cdots$$
4. La notation «dx» indique quelle variable varie entre a et b.

Exemple

Calculons $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

On a $x \to \frac{1}{x}$ est continue sur $[1,2]$, Alors :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \ln'(x)\mathrm{d}x\\ &= [\ln(x)]_1^2\\ &= \ln 2 - \ln 1\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

Calculons $\int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

On a $x \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est continue sur $[1,9]$, Alors :

$$\begin{aligned}\int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^9 (\sqrt{x})'\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\sqrt{(x)}\right]_1^9\\ &= \sqrt{9}-\sqrt{1}\\ &= 2\end{aligned}$$

Propriété

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, on a :

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

• Preuve

On a $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^a = F(a)-F(a) = 0.$

On a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a) = -\big(F(a)-F(b)\big) = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

II Relation de chasles- la linéarité de l'intégrale

Propriété

Soient f et g deux fonctions continue sur l'intervalle $[a,b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

1. **Relation de Chasles** : $(a \leq c \leq b)$ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$
2. **La linéarité de l'intégrale** :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\\ \int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x &= \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Exemple

Calculons $\int_0^1 (x^2+5x-3)\,\mathrm{d}x$.
On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+5x-3)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + 5\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 3\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[3x\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3} + 5\times\frac{1}{2} - 3\\ &= \frac{-1}{6}\end{aligned}$$

Calculons $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x$

En utilisant ainsi la relation de Chasles, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{e}}^{1} -\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln'(x)\times\ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^e \ln'(x)\times\ln x\,\mathrm{d}x\\ &= -\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e\\ &= -\left(0+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-0\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Application

On considère les deux intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx$

1. Calculer $I+J$ et $I-J$.
2. En déduire I et J.

III Fonction définie par un intégrale :

Considérons une fonction f continue sur I et $a \in I$. Soit F la fonction primitive de f sur I et qui s'annule en a, on a :

$$\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a) = F(x)$$

T Théorème

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$, la fonction F définie par : $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la fonction primitive de f qui s'annule en a.
La fonction F est dérivable sur I et $(\forall x \in I)$, $F'(x)=f(x)$

Exemple

On va étudier les variations de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x e^{t^2}(t^2-4)dt$.
La fonction F est la primitive de la fonction $f(x)=e^{x^2}(x^2-4)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $F'(x)=e^{x^2}(x^2-4)$
D'où le signe de $F'(x)$ est celui de x^2-4.
Donc F est croissante sur $]-\infty,-2]$ et $[2,+\infty[$ et décroissante sur $[-2,2]$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle J. et u et v deux fonctions définie et dérivable sur I telles que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$.
La fonction définie par $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)$; $F'(x)=v'(x)\times f(v(x))-u'(x)\times f(u(x))$

Exemple

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x)=\int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t}dt$.
On a la fonction $f: x \to \sqrt{1+x}$ est continue sur $[-1,+\infty[$.
Et la fonction $v: x \to x^2+2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v(\mathbb{R})=[-1,+\infty[$.
Et par suite la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= v'(x)\times f(v(x)) \\ &= 2(x+1)\sqrt{(x+1)^2} \\ &= 2(x+1)|x+1| \end{aligned}$$

Application

Étudier la dérivabilité et déterminer la fonction dérivée du fonction $f(x)=\int_x^{x+x\sqrt{x}} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}dt$

IV L'intégrale et l'ordre

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a et b deux éléments de I. Alors :

1. Si $a \leq b$ et f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
2. Si $a \leq b$ et $(\forall x \in [a;b])$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
3. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
4. Si M une valeur maximale et m valeur minimale de f sur $[a,b]$, Alors on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Exemple

1. On a la fonction ln est continue et positive sur $[1,e]$ et $1 \leq e$, donc : $\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x \geq 0$.
2. Montrons que : $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq 1$ Soit $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq t^2 \leq 1 &\implies -1 \leq -t^2 \leq 0 \\ &\implies e^{-1} \leq e^{-t^2} \leq 1 \qquad (\textbf{car } x \mapsto e^x \textbf{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Puisque la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $[0;1]$ et $0 \leq 1$, donc :

$$\begin{aligned} e^{-1} \leq e^{-t^2} \leq 1 &\implies \int_0^1 e^{-1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 1\,\mathrm{d}t \\ &\implies \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq 1 \end{aligned}$$

Application

1. Montrer que : $\int_0^1 \left(e^x - e^{x^2}\right)\mathrm{d}x \geq 0$.
2. Montrer que : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t < 0$.
3. Montrer que : $\frac{1}{2}\ln 2 \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2$.
4. Comparer les deux intégrales suivantes : $\int_{\frac{1}{2}}^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

V la valeur moyenne

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux éléments de I tel que $a < b$.
Il existe au moins un élément $c \in [a,b]$ tel que : $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
Le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est dite la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Exemple

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Déterminons la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,1]$.
On a f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $[0,1]$, la valeur moyenne de f sur $[0,1]$ est :

$$\begin{aligned}
V_m = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{e^x+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{e+1}
\end{aligned}$$

VI Quelques Méthode de calculs des intégrales

1 Méthode 1 : Utiliser les primitives des fonction usuelles

1 Calculons $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx &= \int_1^e \ln' x \ln^2 x\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

1.Chapter 1 Intégration

2 Calculons $\int_0^{\ln 2} e^{2t}\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} e^{2t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)'\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 2}\\ &= \frac{1}{2}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}e^{\ln 4}-\frac{1}{2}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

VII Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a,b]$, tels que u' et v' sont continue sur $[a,b]$. On a :

$$\begin{aligned}(uv)'(x) &= u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)\\ u'(x)\times v(x) &= (uv)'(x)-u(x)\times v'(x)\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_a^b u'(x)\times v(x)\,\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

cette formule est dite formule d'intégration par partie

Exemple

1 Calculons l'intégrale suivante $I=\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$, par parties.

Posons : $\begin{cases}u'(x)=\sin x\\ v(x)=x\end{cases}$ Alors $\begin{cases}u(x)=-\cos x\\ v'(x)=1\end{cases}$

On a u et v sont dérivables sur $[0,\pi]$ et u' et v' sont continues sur $[0,\pi]$.

Alors : $I=\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^{\pi} - [-\sin x]_0^{\pi} = \pi$

2 Calculons l'intégrale suivante $J=\int_1^{\ln 2}(x-1)\,e^x\,\mathrm{d}x$, par parties.

Posons : $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x-1 \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

On a : $\int_1^{\ln 2} (x-1)\, e^x \,\mathrm{d}x = [(x-1)\, e^x]_1^{\ln 2} - \int_1^{\ln 2} e^x \,\mathrm{d}x = [(x-1)\, e^x]_1^{\ln 2} - [e^x]_1^{\ln 2} = 2(\ln 2 - 1) - (2-e) = 2\ln 2 - 4 + e$

3 Calculons l'intégrale suivante $K = \int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$, par parties.

Posons : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x+1) \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

(**Remarque : le choix $x \mapsto x+1$ fonction primitive de $x \mapsto 1$ est importante pour simplifier les calcules**)

On a : $\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 1\mathrm{d}x = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - [x]_0^1 = 2\ln 2 - 1$

Application

Calculer les intégrales suivantes en utilisons une intégration par parties :

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$
2. $J = \int_1^{e} (2x-1)\ln(x)\,\mathrm{d}x$
3. $K = \int_0^{-1} xe^{2x+1}\,\mathrm{d}x$
4. $L = \int_1^{3} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$
5. $M = \int_1^{e} \ln(x)\,\mathrm{d}x$
6. $N = \int_0^{\ln 2} xe^x\,\mathrm{d}x$
7. $O = \int_1^{e} \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$
8. $P = \int_0^{\ln 3} x\left(e^x + e^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$
9. $S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$
10. $T = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

1 l'intégration par changement de variable :

T **Théorème**

Soient g une fonction dérivable sur $[a,b]$ et f une fonction continue sur $g([a,b])$, on a :

$$\int_a^b g'(x) \times (f \circ g)(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

cette propriété est dite propriété du changement de variable.

Exemple

Calculons l'intégrale suivante : $I=\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Posons $t=\frac{1}{x}$, et on a : $dt=-\frac{1}{x^2}dx$ et $4-x^2=\frac{4t^2-1}{t^2}$.

Si $x=1$ on a $t=1$ et si $x=\sqrt{3}$ on a $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc

$$\begin{aligned}
I &= \int_{1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-\frac{dt}{\sqrt{\frac{4t^2-1}{t^2}}}\\
&= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{t\,dt}{\sqrt{4t^2-1}}\\
&= \left[\frac{1}{4}\sqrt{4t^2-1}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

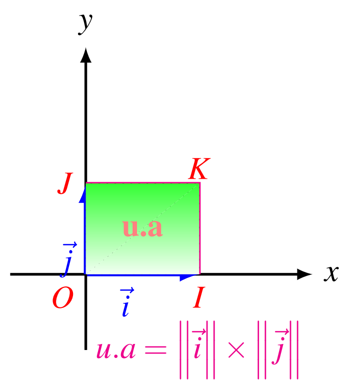
VIII Applications du calcul intégral

1 Calcule des aires

Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère orthogonal du plan.

L'unité d'aire , que l'on note **u.a**, est l'aire de rectangle OIKJ.

$$u.a=\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|$$



Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ de courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

L'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, est égale à **l'intégrale de a à b de f**. On a :

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}\,(u.a)$$

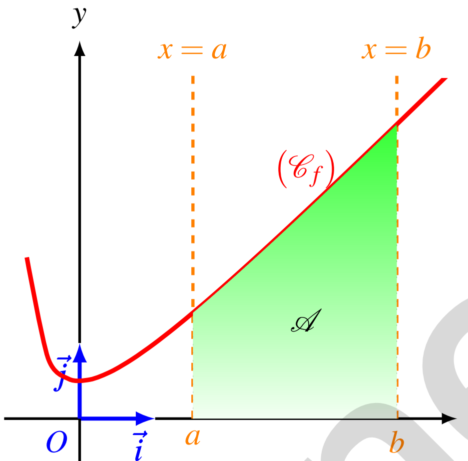
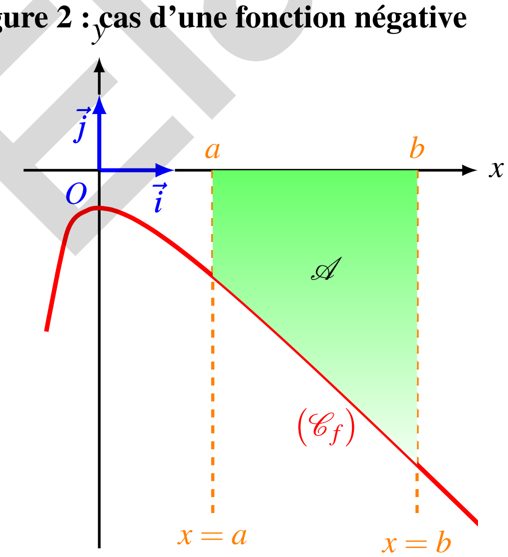


Figure 1 : cas d'une fonction positive

Figure 2 : cas d'une fonction négative



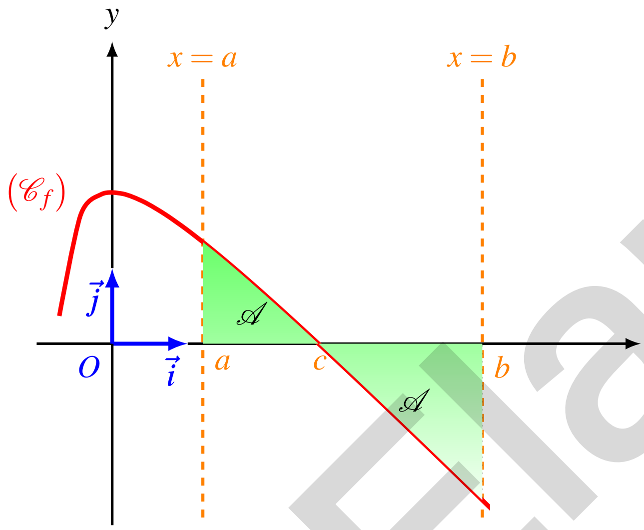
1 Dans la **figure 1** on a f est continue et **positive** sur l'intervalle $[a;b]$, alors :

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \times u.a$$

2 Dans la **figure 2** on a f est continue et **négative** sur l'intervalle $[a;b]$, alors :

$$\mathscr{A} = \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \times u.a$$

3 Il existe un troisième cas si la fonction f change le singe dans l'intervalle $[a;b]$ comme le montre la figure ci-dessous :



On a f est continue et **change de signe** sur l'intervalle $[a;b]$, telle qu'elle est positive sur l'intervalle $[a;c]$ et négative sur l'intervalle $[c;b]$ et donc l'aire du domaine délimité par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites déquation $x=a$ et $x=b$ est :

$$\mathscr{A}=\left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b -f(x)\right)u.a$$

Exemple

1 On considère dans le plan rapporter au repère orthogonal $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ la fonction $f(x)=\dfrac{2}{x}$ tel que $\left\|\overrightarrow{i}\right\|=2cm$ et $\left\|\overrightarrow{j}\right\|=1cm$.
Calculons l'aire du domaine délimité par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites déquation $x=1$ et $x=4$ qu'on note $\mathscr{A}$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \left(\int_1^4 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right) u.a \\
\int_1^4 |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_1^4 \left|\frac{2}{x}\right| \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= [2\ln(x)]_1^4 \\
&= 4\ln 2 \\
\mathscr{A} &= 4\ln 2 \times 1 \times 2\ cm^2 \\
&= 8\ln 2\ cm^2
\end{aligned}$$

2 On considère dans le plan rapporter au repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ la fonction $f(x) = 1 - e^x$ tel que $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$.

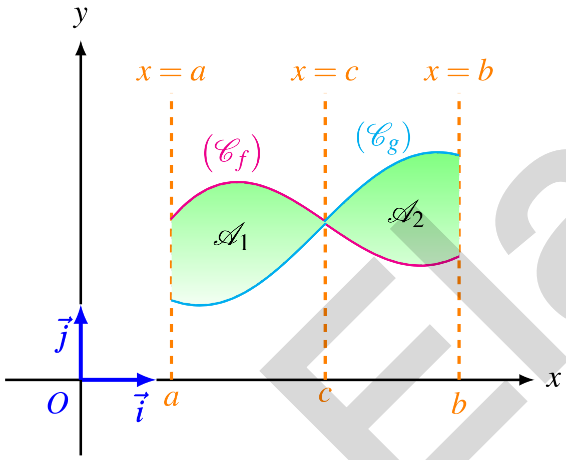
Calculons l'aire du domaine délimité par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites déquation $x = \ln 2$ et $x = \ln 4$ qu'on note $\mathscr{A}$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \left(\int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right) u.a \\
\int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^x - 1\,\mathrm{d}x \quad (car\ \forall x \in [\ln 2, \ln 4],\ 1 - e^x < 0) \\
&= [e^x - x]_{\ln 2}^{\ln 4} \\
&= 2 - \ln 2 \\
\mathscr{A} &= (2 - \ln 2) \times 2 \times 2cm^2 \\
&= 8 - 4\ln 2\ cm^2
\end{aligned}$$

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalles $[a;b]$.
L'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f, la courbe représentative de la fonction g et les deux droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à :

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}(u.a)$$



On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f, la courbe représentative de la fonction g et les deux droites d'équations $x=a$ et $x=b$, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x\\ &= \mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2\\ &= \int_a^c |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x+\int_c^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^c f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b g(x)-f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Exemple

1 Soient f et g deux fonctions définie par : $f(x)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}$, $g(x)=x-1$ et $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ leurs courbe représentatives dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ tel que $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1cm$.
Calculons $\mathscr{A}$ l'aire du domaine limité par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les deux droites d'équations $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=e$:

On a f et g sont continues sur $\left[\frac{1}{e}, e\right]$, donc :

$$\mathscr{A} = \left(\int_{\frac{1}{e}}^{e} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x\right) u.a$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{e}}^{e} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|\frac{\ln x}{x}\right| \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{e}}^{1} -\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_{1}^{e} \\
&= 1 \\
\mathscr{A} &= 1cm^2
\end{aligned}$$

2 Le plan rapporté au repère orthogonale $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ tel que $\left\|\vec{i}\right\| = 3cm$ et $\left\|\vec{j}\right\| = 2cm.$

On considère les deux fonctions f et g définie par : $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1} + e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x}$.
Calculons $\mathscr{A}$ l'aire du domaine limité par la courbe de f, la courbe de g et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.
On a f et g sont continues sur $[0, \ln 2]$, donc :

$$\mathscr{A} = \left(\int_{0}^{\ln 2} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x\right) u.a$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\ln 2} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{\ln 2} \left|\frac{2e^x}{e^x+1}\right| \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\ln 2} \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^{\ln 2} \\
&= 2(\ln 3 - \ln 2) \\
\mathscr{A} &= 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) \times 6\ cm^2 \\
&= 12\ln\left(\frac{3}{2}\right) cm^2
\end{aligned}$$

2 Calcul de volume

Tout ce qui suit l'espace est muni d'un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ et $u.v = \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\| \times \left\|\vec{k}\right\|$ est l'unité du volume.

T Théorème

Soit (Σ) le solide délimité par les plans parallèles d'équation $z = a$ et $z = b$ et $\mathscr{V}$ son volume. Si pour tout $t \in [a,b]$, l'intersection de (Σ) avec le plan d'équation $z = t$ possède une aire $S(t)$ où S est une fonction continue sur $[a,b]$, Alors le volume $\mathscr{V}$ du solide est donné par la formule : $\mathscr{V}(\Sigma) = \int_a^b S(t)dt$

Exemple

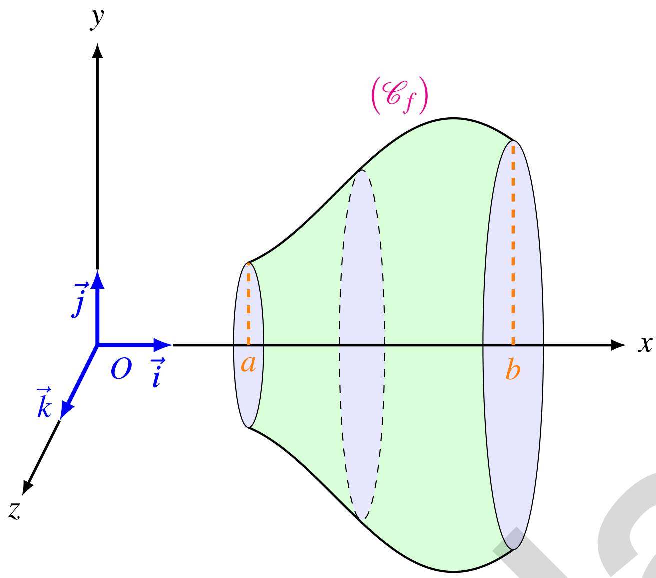
Calcul du volume d'une boule de rayon R.
Soit B une boule de centre O et de rayon R.
Pour tout $t \in [-R,R]$ l'intersection de B avec le plan d'équation $z = t$ est un disque de rayon $\sqrt{R^2 - t^2}$.
Cette intersection possède une aire $S(t) = \pi(R^2 - t^2)$? S est une fonction continue sur $[-R,R]$. Donc on peut appliquer le théorème président et on obtient alors,

$$\begin{aligned} \mathscr{V}(\mathscr{B}) &= \int_{-R}^{R} S5t)dt \\ &= \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - t^2\right) dt \\ &= \pi\left[tR^2 - \frac{t^3}{3}\right]_{-R}^{R} \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ autour de l'axe des abscisses sur $[a;b]$, exprimé en unité de volume, est égale à :

$$\mathrm{V} = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x \; u.v$$



Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin x\sqrt{\cos x}$, et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ tel que $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$.
Calculons le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $(\mathscr{C}_f)$ autour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x \; u.v \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x\sqrt{\cos x}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{3}\sin^3 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3 0\right) \\
&= \frac{1}{3} \\
V &= \frac{\pi}{3} \times \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\| \times \left\|\vec{k}\right\| cm^3 \\
&= \frac{8\pi}{3} cm^3
\end{aligned}
$$

1.Chapter 1 Intégration

IX Somme de Riemann

T Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

pour touts $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $s_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ et $S_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$

Les deux suites $(s_n)_n$ et $(S_n)_n$ sont convergente en une limite commune $\int_a^b f(x)\,dx$.

Exemple

1. Déterminer la limite du suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.
2. Calculer les limites suivantes :
   a. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{n^2+k^2}$
   b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$
   c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2}$