Chapitre

Intégration

Série d'exercices :

Exercice

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(x)\,dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin^2(x)}\,dx$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{x+2}\,dx$
7. $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$

Exercice

1. Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que :
$$(\forall x \neq 0),\ \frac{x^4-x^3+2x^2+1}{x(x^2+1)} = ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2+1}$$
2. Déduire la valeur de l'intégrale suivante : $L = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^4-x^3+2x^2+1}{x(x^2+1)}\,dx$

Exercice

A l'aide dune intégration par partie calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^2 x\sqrt{3-x}\,dx$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \arcsin x\,dx$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin x\cos x\,dx$
7. $I_7 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$

Exercice

Par changement de variable, calculer les intégrales suivantes

1. $I_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$ posons $t = \frac{1}{x}$.
2. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$ posons $t = \tan\frac{x}{2}$
3. $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ posons $t = \sqrt{x}$.
4. $I_4 = \int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$ posons $t = \sqrt{x+1}$.
5. $I_5 = \int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x+1}\,dx$ posons $t = e^x$.
6. $I_6 = \int_1^2 \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\,dx$ posons $t = x - \frac{1}{x}$.
7. $I_7 = \int_0^1 \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,dx$ posons $t = 2+\sqrt{x}$.

Exercice

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \ln\left(e^t-1\right)\,dt & si\; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$.
2.
   a. Étudier la variation du fonction g définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $g(x) = \ln\left(e^x-1\right)$.
   b. Déduire que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)$;
   $x\ln\left(e^x-1\right) \leq f(x) \leq x\ln\left(e^{2x}-1\right)$.
   c. Montrer que f est continue a droite en 0, puis étudier la dérivabilité de f a droite en 0.
   d. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de $\left(C_f\right)$.
3.
   a. Montrer que :
   $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)$, $f'(x) = \ln\left(e^{3x}+e^{2x}-e^x-1\right)$.
   b. Étudier la variation du fonction $h(x) = e^{3x}+e^{2x}-e^x-2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
   c. Déduire que : $\left(\exists!\alpha \in \left]\ln\frac{6}{5}, \ln\frac{5}{4}\right[\right)$ tel que $h(\alpha)=0$ et $f'(\alpha)=0$.
   d. Étudier la variation de f et vérifier que $f(\alpha)<0$ puis déduire que : $\left(\exists!\beta \in \left]\alpha, \ln 2\right[\right)$ tel que $f(\beta)=0$

4 a Etudier le signe f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b Tracer la courbe de f.

$\left(\textbf{On prend } f(\alpha)=-0.3 \quad \alpha=0.2 \quad \ln 2=0.7\right)$

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, posons $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

1 a Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x\, dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

b Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $U_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\, dx \leq U_n + \frac{\ln n}{n}$

2 a Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $-1+\frac{1}{n} \leq U_n \leq -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}$

b Calculer la limite suivante : $\lim_{n\to+\infty} U_n$

c Déduire la limite suivante : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$

Exercice

1 Calculer la limite des suites suivantes :

a $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+nk}}$

b $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

c $U_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$

d $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

e $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[n]{2^k}}{n}$

f $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(2n-k)}}$

g $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

h $U_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$

i $U_n = \frac{1}{(n+1)^4}\sum_{k=1}^{n} k^3$

Exercice

Examen national 2017 session normale

Soit la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \; si \; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.
Soit la fonction numérique F définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, par : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

1. Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. a. Via une intégration par parties, prouver l'égalité suivante :
   $$\forall x>0 \quad ; \int_x^1 \left(e^{-\frac{1}{t}}\right)dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}\right)dt.$$
   b. Calculer $\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}\,dt; \quad \forall x>0.$
   c. Montrer que : $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{1}{e}$
3. Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et par les axes des abscisses et des ordonnées et par la droite d'équation $x=2$.
   Calculer $\mathscr{A}$ en cm^2.

Exercice

Examen national 2018 session normale
Partie 1

1. a. Montrer que : $\forall x>0\,;\ \int_0^x \left(\dfrac{t}{1+t}\right)dt = x-\ln(1+x)$.
   b. par un changement de variable $(u=t^2)$, Montrer que :
   $\forall x>0\,;\ \int_0^x \left(\dfrac{t}{1+t}\right)dt = \dfrac{1}{2}\int_0^{x^2}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{u}}\right)du$
   c. En déduire que : $\forall x>0\,;\ \dfrac{1}{2(1+x)} \leq \left(\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right) \leq \dfrac{1}{2}$
2. Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right)$.

Partie 2

On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

1. Montrer que F est continue et croissante sur $\mathbb{R}$.
2.
   a. Montrer que : $\forall x > 0$; $F(x) \geq x$. En déduire $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.
   b. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   c. Montrer que F^{-1} est dérivable en 0, puis calculer $\left(F^{-1}\right)'(0)$

Exercice

Examen national 2018 session Rattrapage
On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(x) = \int_x^1 f(t)\, dt$$

Avec : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2 \; si\; x \in]0,+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2cm$.

1. Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
2. Calculer $F'(x)$ pour touts $x \geq 0$, puis en déduire la monotonie de F sur $\mathbb{R}^+$.
3.
   a. Via une intégration par parties, calculer : $\int_x^1 \sqrt{t}\ln t\; dt$ pour touts $x > 0$.
   b. Montrer que : $\forall x > 0$; $F(x) = \frac{-2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$.
   c. Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et par les axes des abscisses et des ordonnées et par la droite d'équation $x = 1$.
   Calculer $\mathscr{A}$ en cm^2.
4. On pose : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\, dx$; $\quad n \in \mathbb{N}^*$
   a. Montrer que $u_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée et strictement monotone.
   b. Montrer que $u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis calculer sa limite.

Exercice

Examen national 2020 session normale
On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$$

Avec : $\begin{cases} f(x)=x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ si\ x\in\,]0,+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec : $||\vec{i}||=||\vec{j}||=1cm.$

1 a Étudier suivant les valeurs de x le signe de $F(x)$.
b Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
c Déterminer F'.
d En déduire que F est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

2 a Montrer que : $\forall x\in\,]0,+\infty[\ ;\quad F(x)\leq(1-x)\ln 2$.
b En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

3 a En utilisant la méthode d'intégration par parties, Montrer que :
$\forall x\in\,]0,+\infty[\ ;\quad F(x)=\frac{\ln 2}{4}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt$

b Calculer l'intégrale $\int_x^1\left(\frac{t^3}{t+1}\right)dt\ ;\quad \forall x\in\,]0,+\infty[$.

on remarque que : $\frac{t^3}{1+t}=t^2-t+1-\frac{1}{1+t}$

c En déduire que :
$\forall x\in\,]0,+\infty[\ ;\quad F(x)=\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$

d Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$, en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)\,dt$.

4 On pose : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\quad u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

a Montrer l'inégalité suivante :
$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \forall k\in[0,n-1]\ :\quad -\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\leq-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

b En déduire l'inégalité suivante :

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq u_n\leq-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

on remarque que : $\frac{2k+1}{2n}<\frac{k+1}{n}$

c Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

1.Chapter 1 Intégration