Chapitre

Calcul Intégral

Exercice

Calculer les intégrales suivantes :

$A=\int_2^4 3x\,\mathrm{d}x$, $B=\int_0^1 2x+3\,\mathrm{d}x$, $C=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$,

$D=\int_0^1\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$, $E=\int_1^4\frac{3}{x^2}$, $F=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos(3x))\,\mathrm{d}x$,

$G=\int_{-3}^2|x|\,\mathrm{d}x$, $H=\int_2^e\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$, $I=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,\mathrm{d}x$,

Exercice

1 On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Calculer $I+J$ et $I-J$, puis en déduire les valeur de I et J.

2 On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Calculer $I+J$ et $I-J$, puis en déduire les valeur de I et J.

Exercice

On considère la fonction $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

1 Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x\in[1,2]$, on a : $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$.

2 Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

3 Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^2\frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice

Calculer les intégrales suivantes :

1 Vérifier $\forall x \in \mathbb{R} - 1$

$$\frac{x^2-2x+3}{x-1} = x-1+\frac{2}{x-1}$$

2 Calculer : $\int_2^3 \frac{x^2-2x+3}{x-1}\,\mathrm{d}x$

1 Vérifier $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^{2x}+e^x+1}{1+e^x} = e^x+1-\frac{e^x}{1+e^x}$$

2 Calculer : $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}+e^x+1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

Exercice

Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}, x \in]1,+\infty[$.

1 Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$.

2 Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J = f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$.

Exercice

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 xe^x dx$ **2**. $\int_1^e x^2 \ln x dx$ **3**. $\int_1^e \ln x dx$ 4. $\int_1^e x \ln x dx$ **4**. $\int_1^e (2x-1)\ln x dx$

5. $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ **6**. $\int_{-\ln 2}^0 (x+1)e^{-x} dx$ **7**. $\int_0^{-1} xe^{2x+1} dx$

Exercice

Le plan est apporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,$||\vec{i}|| = 1cm$.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + (1-\frac{2}{x})\ln(x)$.

1 Montrer que (C_f) la courbe de f est en dessous de la droite $(D); y = x$ sur l'intervalle $[1,2]$

2 Montrer que : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right) dx = (1-\ln 2)^2$

3 Déduire l'aire du domaine plan délimité par (C_f) et la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice

Le plan est apporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,$||\vec{i}|| = 1cm$.
Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$.

1. Montrer que (C_f) la courbe de f est en dessous de la droite $(D); y = x$ sur l'intervalle $[0, 1]$
2. Monter que la fonction $H : x \longleftarrow (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h : -x^2e^{-x}$ sur $[0, 1]$
3. Déduire que : $\int_1^2 x^2e^{-x}dx = \dfrac{2e-5}{e}$
4. Par intégration par parties, montrer que $\int_1^2 xe^{-x}dx = \dfrac{e-2}{e}$
5. Déduire l'aire du domaine plan délimité par (C_f) et la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.