Chapitre

Équations et inéquations

I Équation de premier degré à une inconnue

1 Définition

Définition

Soient a, b et x trois nombres réels
Toute égalité de la forme $ax+b=0$ s'appelle équation de premier degré à une inconnue x

Exemple

Les égalités : $2x+3=0$, $\sqrt{2}x-\frac{1}{2}=0$, $-7x-5=4$ et $2x+8=\sqrt{3}x+1$ sont des équations de premier degré à une inconnue

Remarque

☆ Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs possibles (s'elles existent) de l'inconnue qui vérifient l'égalité

☆ Chacune de ces valeurs est appelée solution de l'équation

2 Résolution d'une équation de premier degré à une inconnue

a Règle

Règle

☆ Dans une équation, on peut transmettre un terme d'un côté vers l'autre côté à condition de changer le signe de ce terme

☆ Pour résoudre une équation, on place les termes inconnues dans un côté, et les termes connus dans l'autre côté en appliquent la règle précédente

b Cas et techniques de résolution

Cas 1 : Équations de type $ax+b=c$

1 L'équation $-3x+4=0$ est respectivement équivalente à : $-3x=-4$

$x=\frac{-4}{-3}$

$x=\frac{4}{3}$

Donc cette équation admet une unique solution $\frac{4}{3}$

2 L'équation $5(x+1)=2x-1$ est respectivement équivalente à : $5x+5=2x-1$
$5x-2x=-1-5$
$3x=-6$
$x=\frac{-6}{3}$
$x=-2$
Donc cette équation admet une unique solution -2

3 L'équation $2x+5=2(x+1)+3$ est respectivement équivalente à : $2x+5=2x+2+3$
$2x+5=2x+5$
$2x-2x=5-5$
$0x=0$
Donc tous les nombres réels sont solution de cette équation

4 L'équation $3(2x-1)=6x+7$ est respectivement équivalente à : $6x-3=6x+7$
$6x-6x=7+3$
$0x=10$ ce qui est impossible
Donc cette équation n'adme pas de solution

Cas 2 : Équations de type $(ax+b)(cx+d)=0$

Proposition

Le produit nul Les solutions de l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$ sont les solutions des équations $ax+b=0$ et $cx+d=0$

1 L'équation $(x+1)(2x-3)=0$ est respectivement équivalente à : $x+1=0$ ou $2x-3=0$
$x=-1$ ou $2x=3$
$x=-1$ ou $x=\frac{3}{2}$
Donc cette équation admet deux solutions -1 et $\frac{3}{2}$

2 L'équation $x^2-7x=0$ est respectivement équivalente à : $x(x-7)=0$
$x=0$ ou $x-7=0$
$x=0$ ou $x=7$
Donc cette équation admet deux solutions 0 et 7

Cas 3 : Équations fractionnaires

Règle
Pour résoudre une équation fractionnaire, on réduit au même dénominateur

1 L'équation $\frac{2x+1}{5}=\frac{x-1}{3}$ est respectivement équivalente à : $3(2x+1)=5(x-1)$
$6x+3=5x-5$
$6x-5x=-5-3$
$x=-8$
Donc cette équation admet une unique solution -8

2 L'équation $\dfrac{2x+1}{5}-2=\dfrac{x-1}{3}$ est respectivement équivalente à : $\dfrac{2x+1}{5}-\dfrac{10}{5}=\dfrac{x-1}{3}$
$\dfrac{2x+1-10}{5}=\dfrac{x-1}{3}$
$\dfrac{2x-9}{5}=\dfrac{x-1}{3}$
$\dfrac{3(2x-9)}{15}=\dfrac{5(x-1)}{15}$
$3(2x-9)=5(x-1)$
$6x-27=5x-5$
$6x-5x=-5+27$
$x=22$
Donc cette équation admet une unique solution 22

Cas 4 : Équations de type $x^2=a$

Remarque

Pour résoudre ce type d'équation, On rappelle l'identité ❸ : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Proposition

Les solutions de l'équation $x^2=a$

a) Si $a>0$, l'équation admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
b) Si $a=0$, l'équation admet un e unique solution 0
c) Si $a<0$, l'équation n'admet pas de solution

1 L'équation $x^2+12=2$ est respectivement équivalente à : $x^2=2-12$
$x^2=-10$
Donc cette équation n'admet pas de solution

2 L'équation $(2x-1)^2-9=0$ est respectivement équivalente à : $(2x-1)^2-3^2=0$
$(2x-1-3)(2x-1+3)=0$
$(2x-4)(2x+2)$
$2x-4=0$ ou $2x+2=0$
$2x=4$ ou $2x=-2$
$x=\dfrac{4}{2}$ ou $x=\dfrac{-2}{2}$
$x=2$ ou $x=-1$
Donc cette équation admet deux solutions 2 et -1

Cas 5 : Équations avec factorisation (Un facteur commun ou une identité remarquable)

1 L'équation $2x(x+\sqrt{2})-\sqrt{3}(x+\sqrt{2})=0$ est respectivement équivalente à :
$(x+\sqrt{2})(2x-\sqrt{3})=0$
$x+\sqrt{2}=0$ ou $2x-\sqrt{3}=0$
$x=-\sqrt{2}$ ou $2x=\sqrt{3}$
$x=-\sqrt{2}$ ou $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc cette équation admet deux solutions $-\sqrt{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2 L'équation $x^2-6x+9=0$ est respectivement équivalente à : $x^2-2\times x\times 3+3^2=0$
$(x-3)^2=0$
$x-3=0$
$x=3$
Donc cette équation admet une unique solutions 3

3 L'équation $25x^2+30x+9=0$ est respectivement équivalente à : $(5x)^2 22\times 5x\times 3+3^2=0$
$(5x+3)^2=0$
$5x+3=0$
$5x=-3$
$x=\dfrac{-3}{5}$
Donc cette équation admet une unique solution $\dfrac{-3}{5}$

4 L'équation $(x-1)(x+3)+x^2-1=0$ est respectivement équivalente à : $(x-1)(x+3)+(x-1)(x+1)=0$
$(x-1)(x+3+x+1)=0$
$(x-1)(2x+4)=0$
$x-1=0$ ou $2x+4=0$
$x=1$ ou $2x=-4$
$x=1$ ou $x=\dfrac{-4}{2}$
$x=1$ ou $x=-2$
Donc cette équation admet deux solutions 1 et -2

Cas 6 : Résolution d'une équation avec développement (Parethèses ou pas de facteur commun)

1 L'équation $x(x+3)=x^2-15$ est respectivement équivalente à : $x^2+3x=x^2-15$
$\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}=-15$
$3x=-15$
$x=\dfrac{-15}{3}$
$x=-5$
Donc cette équation admet une unique solution -5

II Résolution des problèmes

1 Mise en équation de problème

Règle

Les étapes de résolution d'un problème sont :

- ❶ Choix de l'inconnue
- ❷ Mise en équation : transformation des données en une équation
- ❸ Résolution de l'équation

◆ ❹ Retour au problème, vérification et réponse au questions posées

2 Exemple

• Exemple

La somme des âges de Aziz, de sa mère et de sa grande-mère est 90 ans
L'âge de la grande-mère est est le double de l'âge de la mère et l'âge de Aziz est le tiers de l'âge de sa mère
Quel est l'âge de chacun ?

Solution

◆ ❶ Choix de l'inconnue
Soit x l'âge de la mère

◆ ❷ Mise en équation
❖ L'âge de la mère est x
❖ L'âge de la grande-mère est $2x$ car c'est le double de l'âge de la mère
❖ L'age de Aziz est $\frac{x}{3}$ car c'est le tiers de l'âge de la mère
Et puisque la somme de leurs âges est 90 ans, alors l'équation est : $x+2x+\frac{x}{3}=90$

◆ ❸ Résolution de l'équation
L'équation $x+2x+\frac{x}{3}=90$ est respectivement équivalente à :
$\frac{3x+6x+x}{3}=\frac{270}{3}$
$3x+6x+x=270$
$10x=270$
$x=\frac{270}{10}=27$
Donc la solution de cette équation est27

◆ ❹ Retour au problème
On a $27+2\times27+\frac{27}{3}=27+54+9=90$
Donc la solution est vraie
✓ L'âge de la mère est 27 ans
✓ L'âge de la grande-mère est 54 ans
✓ L'âge de Aziz est 9 ans

III Inéquation de premier degré à une inconnue

1 Définition

Définition

Soient a, b et x trois nombres réels
Toute inégalité de la forme $ax+b<0$ ou $ax+b\leqslant 0$ ou $ax+b>0$ ou $ax+b\geqslant 0$ s'appelle inéquation de premier degré à une inconnue x

• Exemple

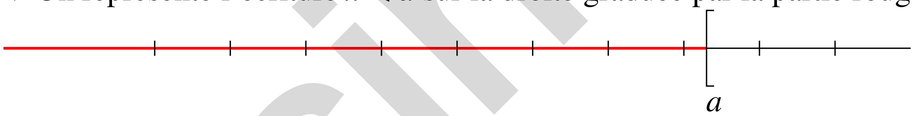
Les inégalités : $-3x-5<0$, $\sqrt{2}x+7\geqslant 0$, $-7x-5>\dfrac{2}{3}x-14$ et $2x+8\leqslant\sqrt{3}x+1$ sont des inéquations de premier degré à une inconnue

Remarque

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs possibles (s'elles existent) de x qui vérifient l'inégalité

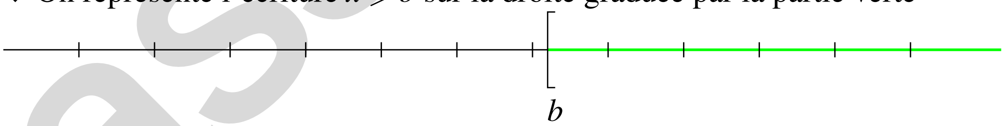
2 Représentation des solutions d'une inéquation sur une droite graduée

◆ On représente l'écriture $x<a$ sur la droite graduée par la partie rouge



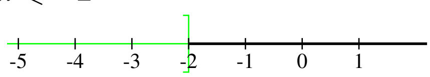
- a ne fait pas partie des réels x qui vérifient $x<a$
- Le crochet est orienté dans le sens opposé des solutions

◆ On représente l'écriture $x\geqslant b$ sur la droite graduée par la partie verte

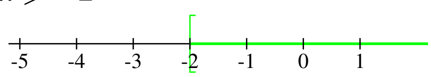


- a fait partie des réels x qui vérifient $x\geqslant b$
- Le crochet est orienté dans le sens des solutions

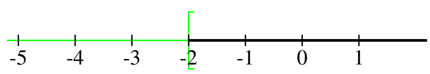
➡ $x\leqslant -2$



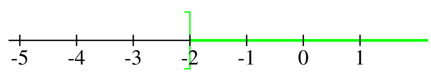
➡ $x\geqslant -2$



➡ $x<-2$



➡ $x>-2$



3 Résolution des inéquations

Cas 1 : Si $a > 0$

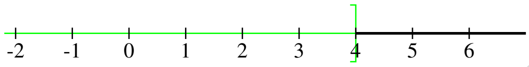
Alors les solutions de l'inéquation $ax+b<0$ est $x<\dfrac{-b}{a}$ (On ne change pas de symbole)

❍ L'inéquation $4x-5\leqslant 2x+3$ est respectivement équivalente à : $4x-2x\leqslant 3+5$

$2x\leqslant 8$

$x\leqslant \dfrac{8}{2}$

$x\leqslant 4$ Donc tous les nombres réels inférieurs ou égaux à 4 sont solution de cette inéquation



Cas 2 : Si $a < 0$

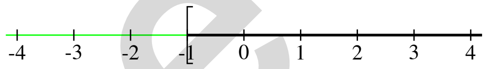
Alors les solutions de l'inéquation $ax+b<0$ est $x>\dfrac{-b}{a}$ (On inverse le symbole)

❍ L'inéquation $2x-6>7x-1$ est respectivement équivalente à : $2x-7x>-1+6$

$-5x>5$

$x<\dfrac{5}{-5}$

$x<-1$ Donc tous les nombres réels strictement inférieurs à -1 sont solution de cette inéquation



Cas 3 : Inéquations n'admettant pas de solutions

L'inéquation $\dfrac{2x-5}{3}-\dfrac{x+1}{2}\geqslant\dfrac{x}{6}$ est respectivement équivalente à : $\dfrac{2(2x-5)-3(x+1)}{6}\geqslant\dfrac{x}{6}$

$2(2x-5)-3(x+1)\geqslant x$

$4x-10-3x-3\geqslant x$

$4x-3x-x\geqslant 10+3$

$0x\geqslant 13$

$0\geqslant 13$ Ce qui est impossible

Donc cette inéquation n'admet pas de solution

Cas 4 : Inéquations admettant une infinité de solutions

L'inéquation $5(2x-1)-7x<3(x+1)$ est respectivement équivalente à : $10x-5-7x<3x+3$

$10x-7x-3x<3+5$

$0x<8$

$0<8$ Ce qui est toujours vraie

Donc tous les nombres réels sont solutions de cette inéquation (l'inéquation admet une infinité de solution)

4 Problèmes et inéquations

Règle

Pour résoudre un problème attaché à une inéquation, on suit les étapes suivantes :

- ❶ Choix de l'inconnue
- ❷ Mise en inéquation : transformation des données en une inéquation
- ❸ Résolution de l'inéquation
- ❹ Retour au problème, vérification et réponse au questions posées

Remarque

Lorsqu'on emploie au problème des expressions comme (au moins, au plus, moins que, plus que, meilleur que, maximal, minial,... (comparaison en général)), alors on utilise les inéquations

• Exemple

Une agence de location de voiture propose deux tarifs
❡ Tarif A : Un forfait de $60Dhs$ plus $0.20Dhs$ par kilomètre parcouru
❡ Tarif B : $0.80Dhs$ par kilomètre parcouru
A partir de quelle distance (en Km) la Tarif A est avantageux (moin cher) pour le client ?

Solution

- ❶ Choix de l'inconnue
  Soit x la distance (en Km) parcourue par le client
- ❷ Mise en inéquation
  Pour la Tarif A, le client doit payer (en Dhs) $60+0.20x$
  Pour la Tarif B, le client doit payer (en Dhs) $0.80x$
  La Tarif A est avantageux (moin cher) que la Tarif B pour le client, signifie que : $60+0.20x \leqslant 0.80x$
- ❸ Résolution de l'inéquation
  L'inéquation $60+0.20x \leqslant 0.80x$ est respsctivement équivalente à :
  $0.2x-0.8x \leqslant -60$
  $-0.6x \leqslant -60$
  $x \geqslant \dfrac{-60}{-0.6}$
  $x \geqslant 100$
- ❹ Retour au problème
  A partir de $100Km$, la Tarif A est moins cher que la Tarif B