Calcul intégrale

I Intégral dune fonction continue sur un segment

Activité

Déterminer une fonction primitive de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x)=5x^2$ et $I=\mathbb{R}$;
2. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ et $I=]1,+\infty[$;
3. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ et $I=]0,+\infty[$;
4. $f(x)=\dfrac{-e^{3x}}{2}$ et $I=\mathbb{R}$.

Activité

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x)=x+1 \quad ; \quad F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-1 \quad ; \quad G(x)=\frac{1}{2}x^2+x+3.$$

1. Vérifier que F et G sont deux fonctions primitives de f.
2. Calculer $F(2)-F(0)$ et $G(2)-G(0)$. Que peut-on déduire ?

On remarque que la valeur 4 ne dépend pas du choix de la fonction primitive.

Le nombre réel $F(2)-F(0)$ s'appelle **l'intégral** de la fonction f de 0 à 2 et on le note :

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2)-F(0).$$

D Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I.

Le nombre $F(b)-F(a)$, où F est une primitive de f, est appelé l'intégrale de la fonction f de a à b, et on le note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. On écrit alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.

Remarque

- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « somme de $f(x)\,\mathrm{d}x$ de a à b » ou « intégrale de $f(x)\,\mathrm{d}x$ de a à b » . Les nombres a et b s'appellent les bornes de cette intégrale.
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, la lettre x peut être remplacée par un autre lettre.

Ainsi, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \dots$$

Exemple

1 Calculer l'intégrale : $\mathscr{I} = \int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

On remarque que pour tout $x > 0$: $f(x) = u'(x)u(x)$ avec $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $u(x) = \ln(x)$, alors la fonction F définie sur $I = \mathbb{R}_+^*$ par : $F(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par suite

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^{e^2} = \frac{1}{2}\ln^2(e^2) - \frac{1}{2}\ln^2(1);$$

d'où $\mathscr{I} = \int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 2.$

2 Calculer l'intégrale : $\mathscr{J} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+t}}\,\mathrm{d}t$

On considère la fonction g telle que : $g(t) = \frac{1}{\sqrt{3+t}}$ pour tout t dans $]-3;+\infty[$.

On peut écrire la fonction g sous forme $g(t) = v'(t)\left(v(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$ avec $v(t) = (3+t)$ et $v'(t) = 1$, alors la fonction $G\colon t \mapsto 2(3+t)^{\frac{1}{2}}$ est une primitive de g sur $]-3;+\infty[$.

Par suite

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+t}}\,\mathrm{d}t = \left[2(3+t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2(3+1)^{\frac{1}{2}} - 2(3+0)^{\frac{1}{2}};$$

d'où $\mathscr{J} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+t}}\,\mathrm{d}t = 4 - 2\sqrt{3}.$

Application

Calculer les intégrales suivantes :

- $A = \int_2^4 1 + x - \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
- $B = \int_1^2 -\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$
- $C = \int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$
- $D = \int_1^4 -\frac{\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$
- $E = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 - \cos(3x)\mathrm{d}x$
- $F = \int_0^1 (x+1)^4\mathrm{d}x$

- $G=\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{e^x+1}\mathrm{d}x$
- $H=\int_1^4 \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\mathrm{d}x$
- $I=\int_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\mathrm{d}x$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de I. Alors :

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$;
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuve

1. On a : $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=F(a)-F(a)=0$.
2. On a : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=-\big(F(a)-F(b)\big)=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

II Relation de Chasles - linéarité

1 Relation de Chasles

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c trois réels de I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve

Soit F une fonction primitive de f sur I, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=F(b)-F(a)\\&=\big(F(c)-F(a)\big)+\big(F(b)-F(c)\big)\\&=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Exemple

Considérons l'intégrale $\mathscr{K} = \int_0^2 \left|x^2(x-1)\right| \mathrm{d}x$. Le tableau de signe de l'expression $x^2(x-1)$ sur $[0;2]$ est :

x	0		1		2
$x^2(x-1)$	0	$-$	0	$+$	

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\mathscr{K} = \int_0^1 \left|x^2(x-1)\right| \mathrm{d}x + \int_1^2 \left|x^2(x-1)\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 -x^2(x-1)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2(x-1)\,\mathrm{d}x,$$

d'où $\mathscr{K} = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \left(\frac{1}{12} - 0\right) + \left(\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{12}\right)\right) = \frac{3}{2}$. Ainsi $\mathscr{K} = \frac{3}{2}$.

Application

1 Calculer les intégrales suivantes :

- $A_1 = \int_{-1}^{1} \left|x^2 - x\right|)\,\mathrm{d}x$;
- $A_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{|\ln(x)|}{x}\,\mathrm{d}x$.

2 Dans la figure ci-contre $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-4,4]$ par $f(x) = x^2 - 2$ et (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

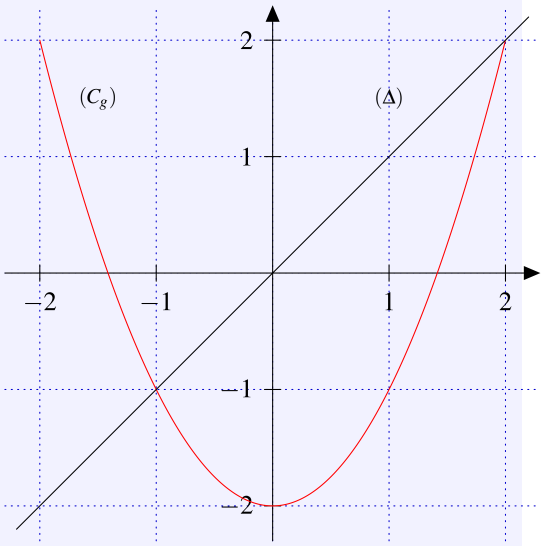
a Résoudre géométriquement l'équation :

$f(x) = x$

b Résoudre géométriquement les inéquations suivantes : $f(x) > x$ et $f(x) < x$

c Dresser le tableau de signe de $f(x) - x$ sur $[-4,4]$

d Calculer : $\int_{-2}^{2} |f(x) - x|\mathrm{d}x$



2 Linéarité

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Pour tout $(a,b) \in I^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Preuve

Soit F une primitive de f sur I et G celle de g sur I. On sait que $F+G$ est une primitive de $f+g$ et λF est une primitive de λf. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x &= (F+G)(b)-(F+G)(a)\\ &= \big(F(b)-F(a)\big)+\big(G(b)-G(a)\big)\\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda\big(F(b)-F(a)\big) = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'où le résultat.

Exemple

On considère les intégrales suivantes : $\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$

1. Calculer $A+B$ et $A-B$.

   On a :

$$\begin{aligned}A+B &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{2\pi} \big(\cos^2(x)+\sin^2(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x\\ &= 2\pi,\end{aligned}$$

1.CHAPTER 1 CALCUL INTÉGRALE

$$
\begin{aligned}
A-B &= \int_0^{2\pi}\cos^2(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{2\pi}\sin^2(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{2\pi}\cos(2x)\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{2\pi}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

2 En déduire A et B.

D'après la question 1 on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} A+B=2\pi \\ A-B=0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 2A=2\pi \\ A=B \end{cases} \quad \text{d'où} \quad A=B=\pi.$$

Exemple

Calcule l'intégrale : $\mathscr{L}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}}\frac{12x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. On a :

$$\mathscr{L}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}}6\times\frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=6\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}}\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=6\Big[\ln|x^2-1|\Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}}}=\ln(\mathrm{e})-\ln(1)=1.$$

Application

1 Vérifier que pour tout $x\in]-1;1[$:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

2 En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

III Intégral et ordre - valeur moyenne

1 Positivité et croissance

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.a et b deux réels de I tels que $b \geq a$.

1. Si f est positive sur $[a,b]$, alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.
2. Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors : $\int_a^b f(x\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

• Preuve

1. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$.

   La fonction F est croissante sur $[a,b]$ car sa dérivée f est positive sur $[a,b]$. D'où :

$$\begin{aligned} b \geq a &\implies F(b) \geq F(a) \\ &\implies F(b) - F(a) \geq 0 \\ &\implies \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0. \end{aligned}$$

2. On a : $f \geq g$, on déduit $f - g \geq 0$ sur $[a,b]$, d'où $\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$; en utilisant la linéarité de l'intégration, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, donc :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple

Déterminer sans calcul le signe de $\displaystyle\int_{-1}^{1} (\mathrm{e}^{-x^2} + x^2)\,\mathrm{d}x$.

e^{-x^2} et x^2 sont toutes deux positives sur $[-1;1]$ donc puisque $-1 \leq 1$, donc :

$$\int_{-1}^{1} (\mathrm{e}^{-x^2} + x^2)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Application

1. Déterminer sans calcul le signe de chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_3^1 \mathrm{e}^x \ln(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad J = \int_\pi^{2\pi} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$$

2 Comparer les intégrales K et L (sans calculer l'intégral) :

2 Valeur moyenne

Propriété

Si f est une fonction continue sur un intervalle I ; a et b sont deux réels distincts de l'intervalle I.

Alors il existe un réel c entre a et b tel que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c)$.

Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est appelé **valeur moyenne de f entre a et b**.

Exemple

La valeur moyenne sur $[\,0\,;\,1\,]$ de la fonction carré est : $\mu = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{3}$.

IV Intégration par parties

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I. Alors pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b u(x).v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cette formule est appelée la formule de l'**intégration par parties**.

• Preuve

La démonstration du théorème découle directement de la règle du produit :

$$(u.v)' = u'v + uv'$$

donc,

$$uv' = (uv)' - u'v.$$

u, v, u', v' sont continues, donc uv, $u'v$ et uv' sont continues aussi.

Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b u(x).v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple

On veut calculer l'intégrale $\int_1^3 xe^x dx$. On pose : $\begin{cases} u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x \\ v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1 \end{cases}$

Ce qui permet de calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_1^3 e^x x dx = [e^x x]_1^3 - \int_1^3 e^x \cdot 1 dx = [e^x x]_1^3 - \int_1^3 e^x \cdot 1 dx = [e^x x]_1^3 - \int_1^3 e^x dx \quad &= [e^x x]_1^3 - [e^x]_1^3 \\ &= [e^x x - e^x]_1^3 = 3e^3 - e^3 \end{aligned}$$

On dit que l'on a fait une intégration par partie pour calculer cette intégrale.

Application

En utilisant une intégration par parties, calcules les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 ce^{3x}\,\mathrm{d}x$;
2. $\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$;
3. $\int_1^{e} \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

V Calculs d'aires - calculs de volumes

1 Calculs d'aires

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On appelle **unité d'aire** (notée $u.a$) l'aire du rectangle $OIMJ$ où I, J et M sont les points définis par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + \vec{j}$.

L'unité d'aire est : $u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.

a Calculs d'aires géométrique

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe et $\mathscr{A}$ l'aire de domaine limité par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $(\Delta_1) : x = a$ et $(\Delta_2) : x = b$:

- Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \times u.a$.
- Si f est négative sur $[a;b]$, alors : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \times u.a$.

- Si f change de signe sur $[a;b]$; par exemple il existe c dans $[a;b]$ tel que f est positive sur $[a;c]$ et négative sur $[c;b]$, alors :

$$\mathscr{A} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b -f(x)\,\mathrm{d}x \times u.a = \int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \times u.a$$
$$= \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \times u.a$$

Propriété

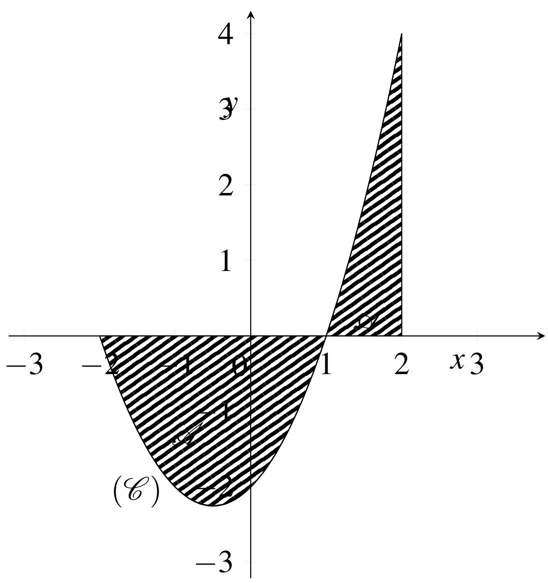
Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{A}$ délimité par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $(\Delta_1): x = a$ et $(\Delta_2): x = b$ est égale à : $\mathscr{A} = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \times u.a.$

Remarque

- Le nombre positif $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ est appelé l'aire géométrique .
- Le nombre positif $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est appelé l'aire algébrique.

Exemple

Dans la figure ci-contre $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-4,4]$ par $f(x) = x^2 + x - 2$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
D'après la figure ci-contre on a :
$(\mathscr{C})$ est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2,1]$
Donc $\forall x \in [-2,1]$ on a : $f(x) \le 0$
Comme $(\mathscr{C})$ est en dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1,2]$
Donc $\forall x \in [1,2]$ on a : $f(x) \ge 0$



Alors la surface du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$ et les axes des équations $y = 0$; $x = -2$ et $x = 2$ est :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_{-2}^{2} |f(x)|\mathrm{d}x.u.a \\
&= \left(\int_{-2}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} |f(x)|\mathrm{d}x\right).u.a \\
&= \left(\int_{-2}^{1} -f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x\right).u.a \\
&= \left(\int_{-2}^{1} -x^2 - x + 2\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} x^2 + x - 2\mathrm{d}x\right).u.a \\
&= \left(\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{1}^{2}\right).u.a \\
\mathscr{A} &= \frac{19}{3}.u.a
\end{aligned}$$

Application

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Calculer l'aire du domaine plan définie par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f \mapsto \ln(x+3)$, l' axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

b Calculs d'aires délimité par deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$, et $\mathscr{A}$ le domaine délimité par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations $(\Delta_1) : x = a$ et $(\Delta_2) : x = b$:

- Si $0 \leq f \leq g$, alors l'aire de Δ est : $\mathscr{A} = \mathscr{A}(g) - \mathscr{A}(f)$.

$$\mathscr{A} = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left|g(x) - f(x)\right|\mathrm{d}x \quad u.a$$

- Si $f \leq g$ quelques soit les signes des f et g, alors de même manière on trouve que l'aire $\mathscr{A}$ est :

$$\mathscr{A} = \int_a^b \left|g(x) - f(x)\right|\mathrm{d}x \quad u.a$$

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$. Soit $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les courbes représentatives de f et g.

Soit Δ le domaine délimité par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Alors :

L'aire $\mathscr{A}$ est :

$$\mathscr{A} = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|\mathrm{d}x \quad u.a.$$

2 Calculs de volumes

On suppose que l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On appelle **unités de volume** (notée $u.v$) le volume du cube $OIMJKABC$ où I, M,J, K, A, B, C sont les points définis par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Les unités de volume est : $u.v = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$.

a Volume dun solide

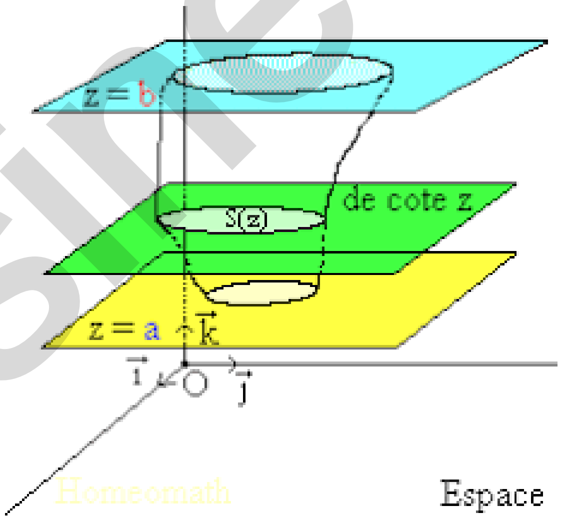
Propriété

Soit (S) un solide limité par deux plans parallèles au plan $(O;\vec{i};\vec{j})$:

- Le plan d'équation $z = a$.
- Le plan d'équation $z = b$.

Si $S(t)$ est l'aire de l'intersection du solide (S) avec tout plan parallèle à $(O;\vec{i};\vec{j})$ de cote t, alors le volume de ce solide est (en unités de volume) :

$$\mathscr{V} = \int_a^b s(t)\mathrm{d}t.$$



b Volume dun solide engendré par la rotation dune courbe

Propriété

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a \leq b)$, et $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ autour de laxe des abscisses un tour complet est donné par (en unités de volume) :

$$\mathscr{V} = \pi \int_a^b (f(t))^2 \mathrm{d}x.$$

Exemple

Lespace est muni dun repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, tel que $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1\ cm$.

On considère la fonction $f(x) = x+3$ sur $[1;3]$,$(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f sur $[1;3]$ autour de laxe des abscisse de 360°.

2 On calcule V le volume du solide de révolution obtenu : On a :

$$V = \pi \int_a^b (f(t))^2 \mathrm{d}x \quad ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}|| \times ||\vec{k}||$$

$$v = \pi \int_1^3 (x+3)^2 \mathrm{d}x \mathrm{cm}^3$$

$$v = \pi \int_1^3 (x+3)'(x+3)^2 \mathrm{d}x \mathrm{cm}^3$$

$$V = \pi \Big[\frac{1}{3}(x+3)^3\Big]_1^3 \mathrm{cm}^3$$

Application

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Calculer le volume du solide engendrée par rotation de courbe de $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x}$ un tour complet autour l'axe des abscisses sur $[1;3]$.