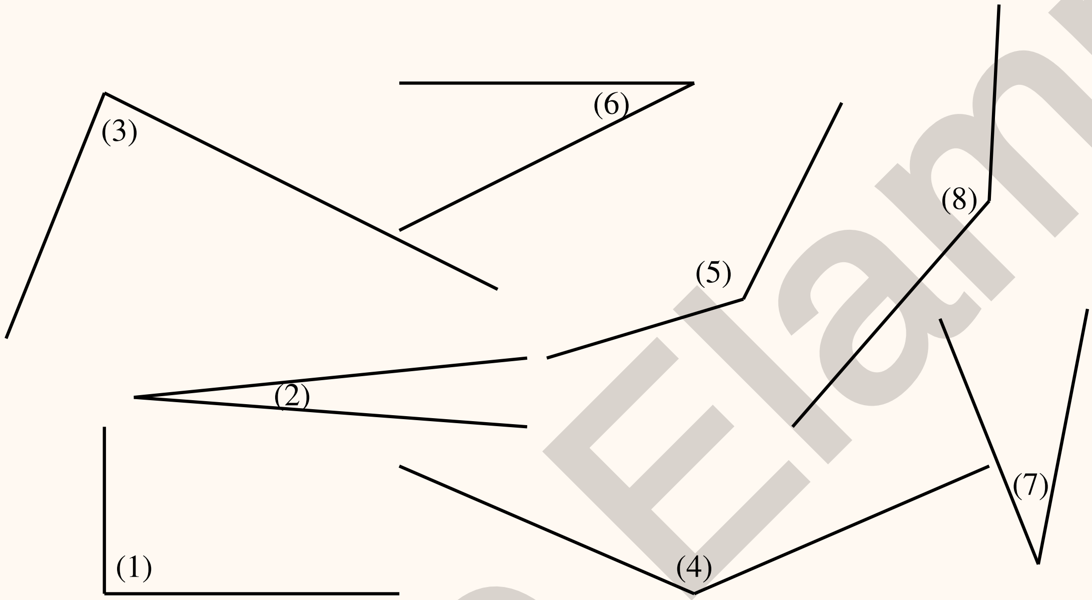
Angles d'un triangle et triangles particuliers

Activité

On considère la figure suivante

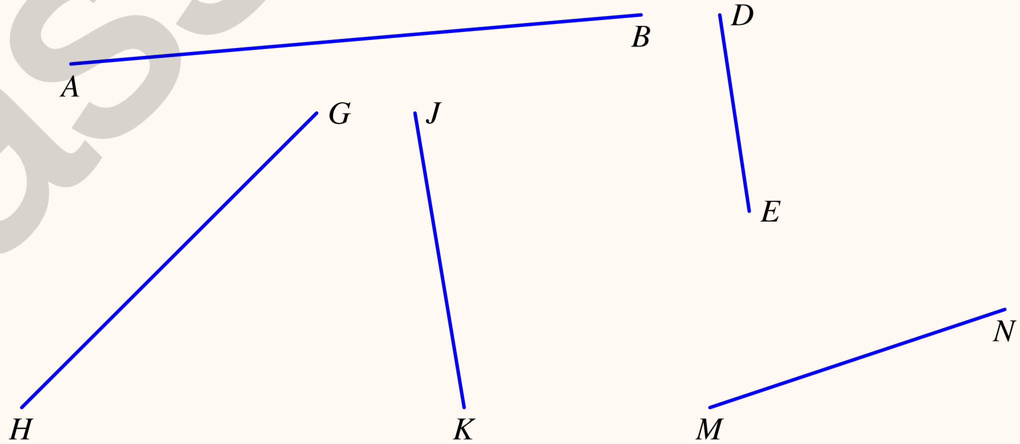


Compléter le tableau suivant

Angles nř	1	2	3	4	5	6	7	8
Mesure en degré	…	…	…	…	…	…	…	…

Activité

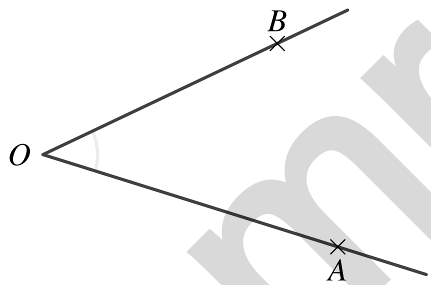
Construire un angle de mesure donnée



Construire les angles :
$\widehat{ABC} = 52°$; $\widehat{EDF} = 21°$; $\widehat{GHI} = 105°$; $\widehat{JKL} = 90°$ et $\widehat{MNO} = 148°$

I Angles - Définitions et vocabulaires

La figure à côté s'appelle ; un angle et se note : $\widehat{AOB}$
✷ /e point O est le sommet de l'angle $\widehat{AOB}$
✷ Les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ sont les côtés de l'angle $\widehat{AOB}$



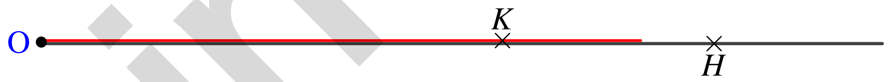
II Angles particuliers

1 Angle nul

Définition

Un angle nul mesure 0°, ses deux côtés sont confondus l'un sur l'autre

Exemple



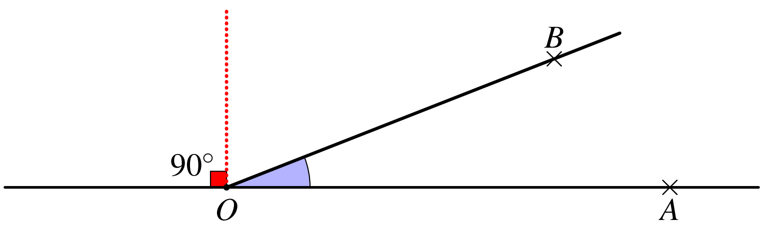
L'angle $\widehat{HOK}$ est un angle nul

2 Angle aigu

Définition

Un angle aigu est un angle dont sa mesure est comprise entre 0° et 90°

Exemple



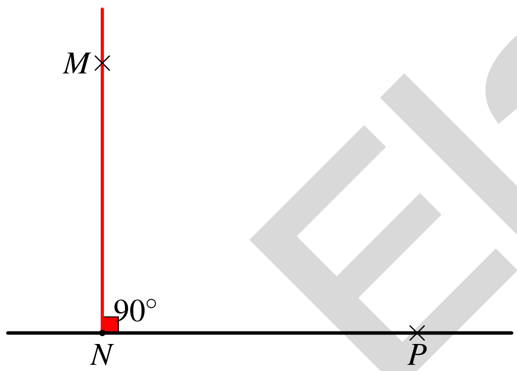
L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle aigu

3 Angle droit

Définition

Un angle droit est un angle dont sa mesure est égale à $90°$

Exemple



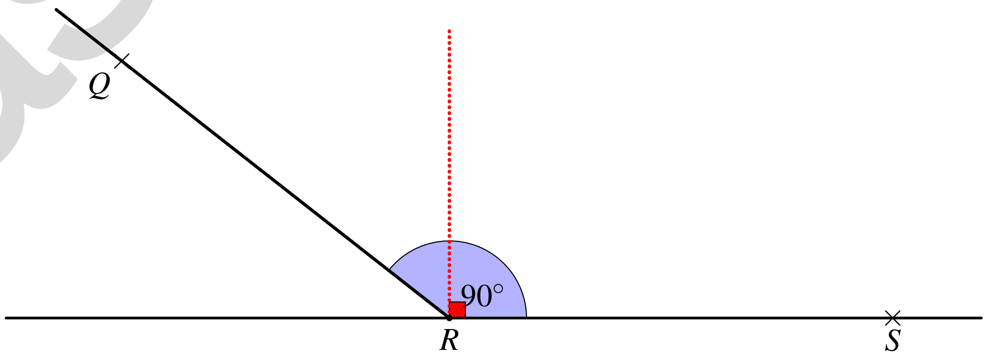
L'angle $\widehat{PNM}$ est un angle droit
Et on a $\widehat{PNM} = 90°$

4 Angle obtus

Définition

Un angle obtus est un angle dont sa mesure est comprise entre $90°$ et $180°$

Exemple



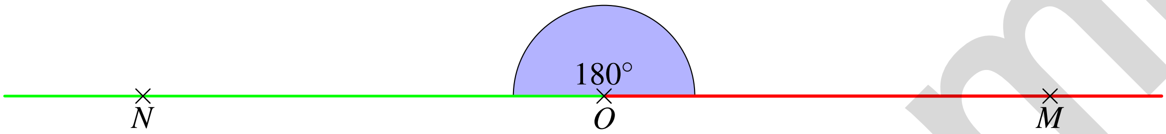
L'angle $\widehat{SRQ}$ est un angle obtus

5 Angle plat

Définition

Un angle plat est un angle dont sa mesure est égale à 180°

Exemple



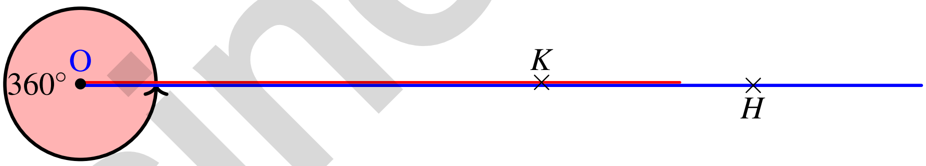
L'angle $\widehat{MON}$ est un angle plat
Et on a $\widehat{MON} = 180°$

6 Angle plein

Définition

Un angle plein est un angle qui mesure 360°, ses deux côtés sont confondus l'un sur l'autre

Exemple



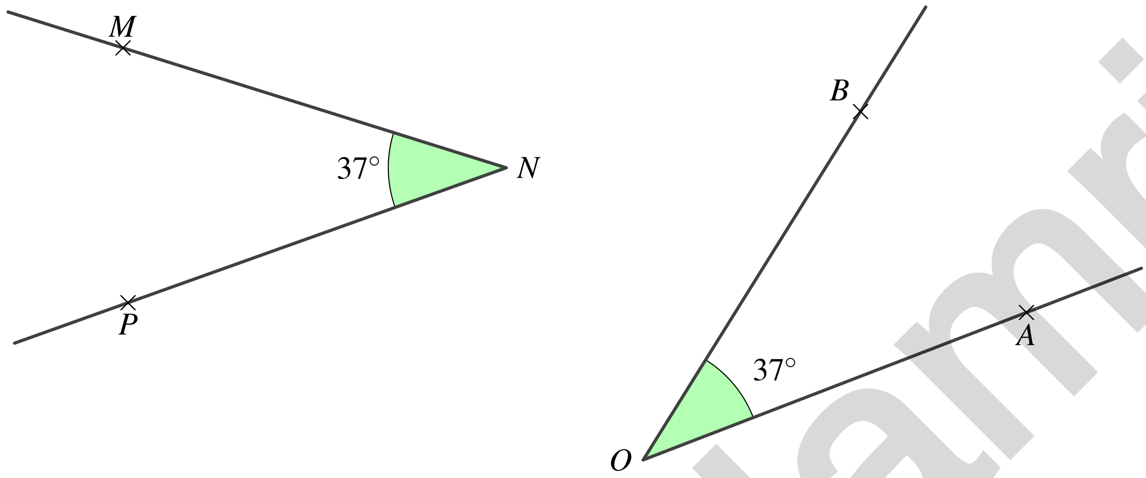
L'angle $\widehat{HOK}$ est un angle nul

7 Angle égaux

Définition

Deux angles sont dits égaux, s'ils ont la même mesure

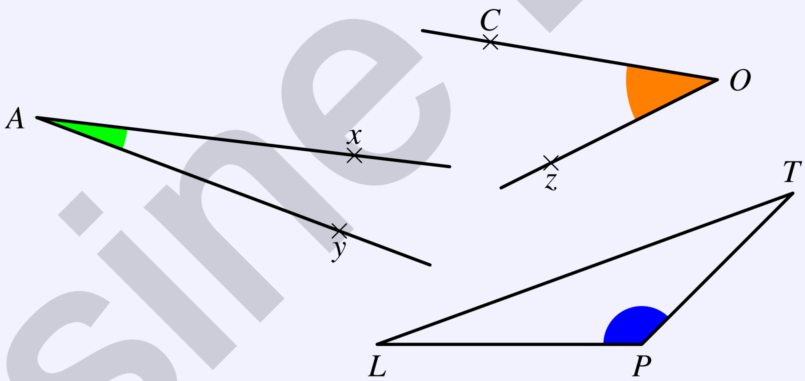
• Exemple



Les deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{MNP}$ sont égaux
Et on a : $\widehat{AOB} = \widehat{MNP} = 37°$

Application

Recopie et compléter le tableau ci-dessous



Angles nř	vert	orange	bleu
Nom	...	...	...
Sommet	...	...	...
Côtés	... et ...	... et ...	... et ...

Application

Donner la nature de chacun de angles cités dans le tableau suivant

$\widehat{ABC}$	$\widehat{FED}$	$\widehat{HIJ}$	$\widehat{KLM}$	$\widehat{OPS}$	$\widehat{XVZ}$
45°	13.5°	180°	100.4°	89.9°	179.9°

III Angles adjacents, complémentaires, supplémentaires et opposés par le sommet

Activité

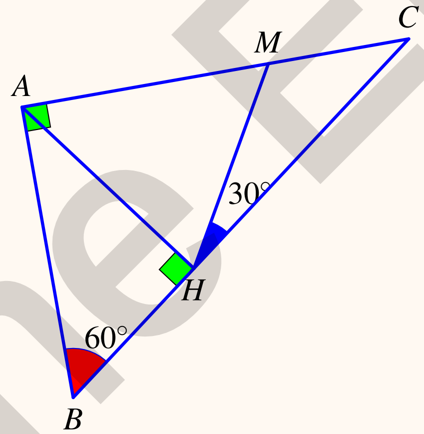
◆*Partie* I :

1 **a** **Sur papier uni, tracer les cinq angles suivants :**
$\widehat{ABC} = 34°$; ; $\widehat{DEF} = 108°$; ; $\widehat{GHI} = 82°$; ; $\widehat{JKL} = 72°$; ; $\widehat{MNO} = 56°$

b **Citer deux de ces angles dont la somme des mesures est** $90°$
On dit que ces deux angles sont complémentaires

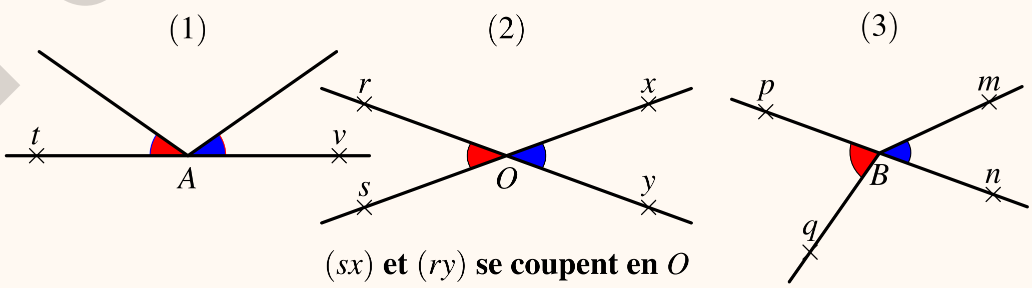
c **Citer deux de ces angles dont la somme des mesures est** $180°$
On dit que ces deux angles sont supplémentaires

2 **Deux angles sont adjacents lorsqu'ils ont le même sommet, un côté en commun et sont situés de part et d'autre de ce côté commun**
On considère la figure suivante



Nommer deux angles :
✓ **complémentaires et adjacents**
✓ **complémentaires et non adjacents**
✓ **supplémentaires et adjacents**
✓ **supplémentaires et non adjacents**
✓ **adjacents ni complémentaires ni supplémentaires**

◆*Partie* II :
On considère la figure suivante



(sx) **et** (ry) **se coupent en** O

① **Laquelle de ces figures admet un centre de symétrie ? Quel est ce centre ?**

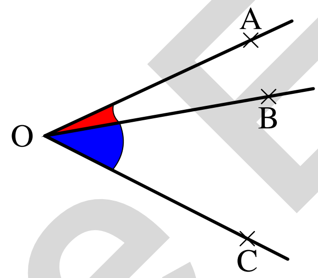
② **Pour cette figure, que peut-on dire alors des deux angles codés ?**
On dit que ces deux angles sont **opposés par le sommet**
③ **Tracer deux droites sécantes en E et coder les angles opposés par le sommet**

1 Angles adjacents

Définition

Deux angles sont adjacents lorsqu'ils ont :
★ Le même sommet
★ Un côté commun et sont situés de part et d'autre du côté commun

Exemple



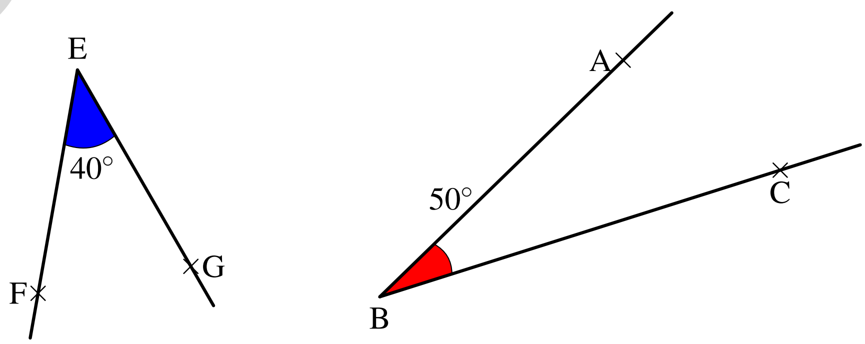
Les deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents, car ils ont O comme sommet commun, et $[OB]$ comme côté commun, et ils sont de part et d'autre du cu côté $[OB]$

2 Angles complémentaires

Définition

Deux angles sont complémentaires lorsque la somme de leurs mesures est égale à 90°

Exemple



Les deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{FEG}$ sont complémentaires, car la somme de leurs mesures est égale

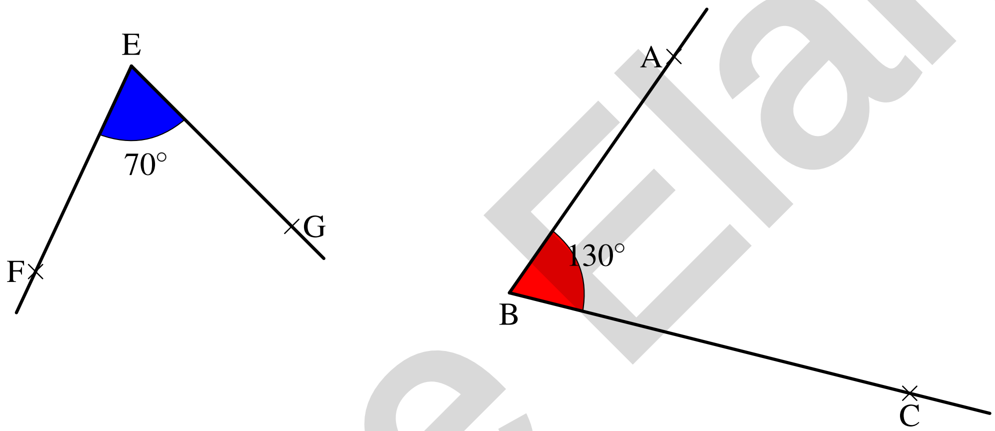
à 90°
Et on a : $\widehat{ABC} + \widehat{FEG} = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$

3 Angles supplémentaires

Définition

Deux angles sont supplémentaires lorsque la somme de leurs mesures est égale à 180°

• Exemple



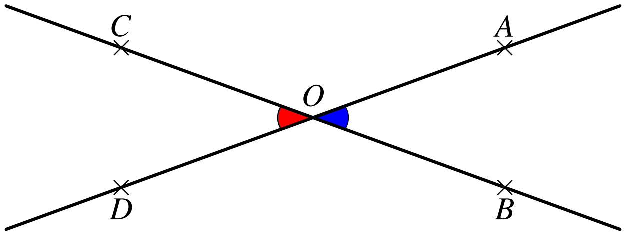
Les deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{FEG}$ sont complémentaires, car la somme de leurs mesures est égale à 180°
Et on a : $\widehat{ABC} + \widehat{FEG} = 130^\circ + 70^\circ = 180^\circ$

4 Angles opposés par le sommet

Définition

Deux angles sont opposés par le sommet lorsqu'ils ont le même sommet, et que leurs côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre

• Exemple

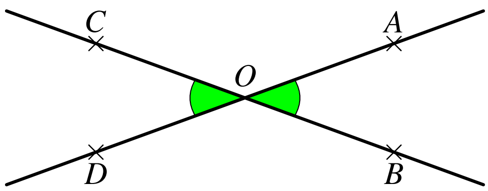


Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet

Propriété

Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils ont la même mesure

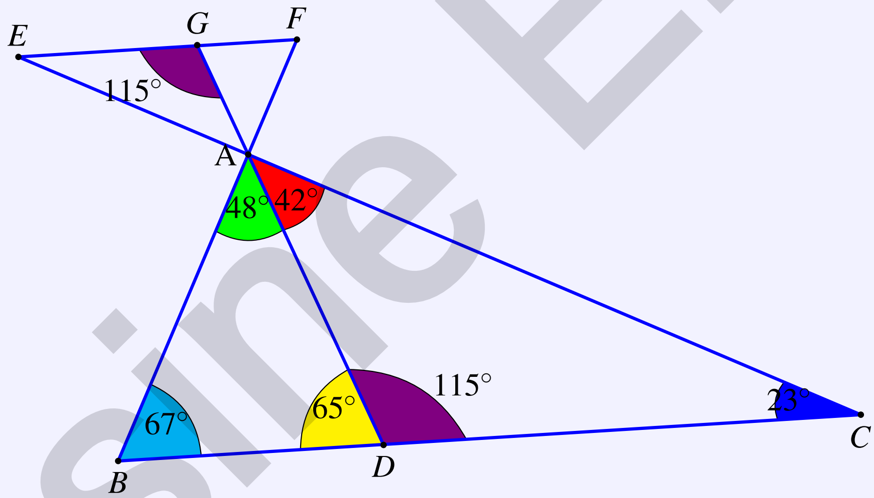
• Exemple



On a $\widehat{AOB} = \widehat{DOC}$ car $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet

Application

On considère la figure suivante



Nomme, en justifiant, deux angles de la figure, codés ou non

- ☆ Complémentaires et adjacents
- ☆ Supplémentaires et adjacents
- ☆ Opposés par le sommet
- ☆ Complémentaires et non adjacents
- ☆ Supplémentaires et non adjacents

Solution

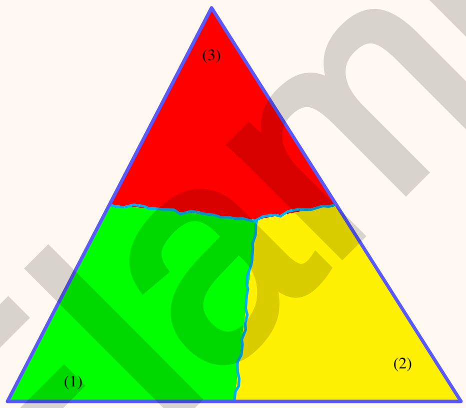
- ✯ $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DAC}$
- ✯ $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ACD}$
- ✯ $\widehat{BDA}$ et $\widehat{ADC}$
- ✯ $\widehat{EGA}$ et $\widehat{ADB}$
- ✯ $\widehat{EAF}$ et $\widehat{CAB}$

IV Le triangle

1 La somme des mesures des angles d'un triangle

Activité

✸ Tracer sur papier uni un triangle ABC
✸ Découper ses angles comme ci-contre et les assemblés pour qu'ils soient deux à deux adjacents
Que peut-on conjectuer sur la somme des mesures de ces angles ?

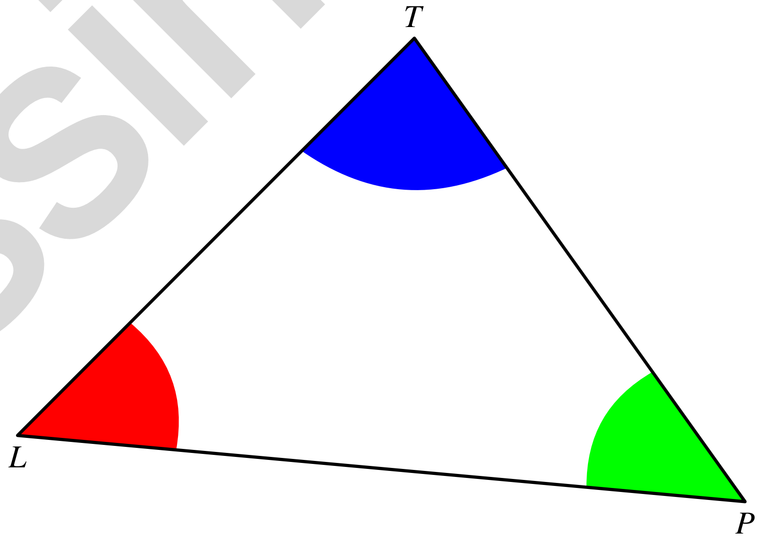


Propriété

Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égales à 180°

• Exemple

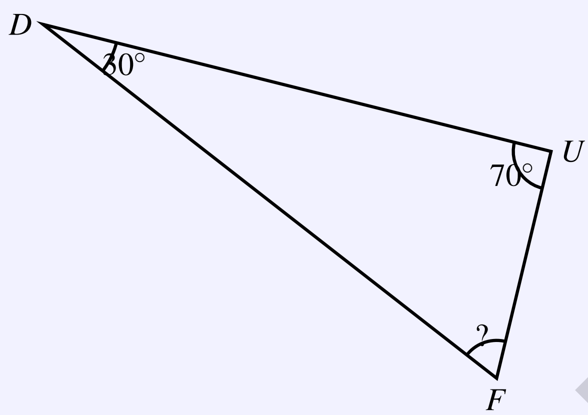
Soit TPL un triangle



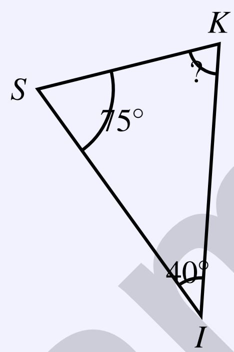
On a $\widehat{TPL}+\widehat{PLT}+\widehat{LTP}=180^\circ$

Application

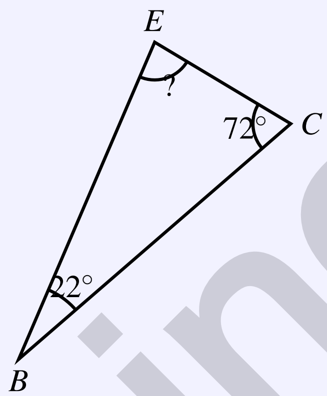
Dans chaque cas ci-dessous, trouver la mesure de l'angle inconnu



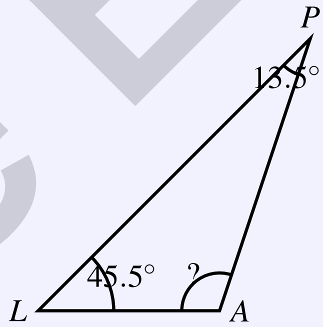
Cas 1



Cas 2



Cas 3



Cas 4

Solution

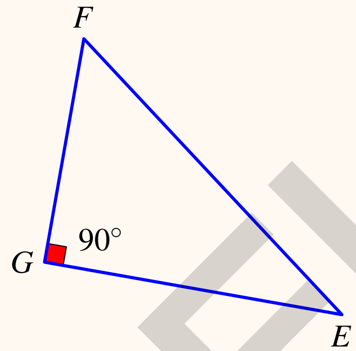
- ✸ Cas 1 : $\widehat{UFD} = 80^\circ$
- ✸ Cas 2 : $\widehat{SKI} = 65^\circ$
- ✸ Cas 3 : $\widehat{ECB} = 86^\circ$
- ✸ Cas 4 : $\widehat{PAL} = 121^\circ$

V Triangles particuliers

1 Triangle rectangle

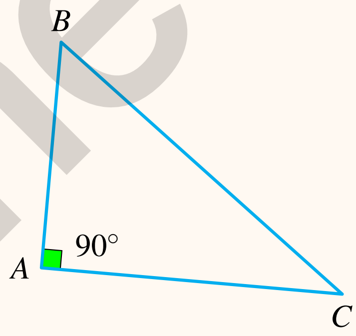
Activité

1. Soit EFG un triangle comme le montre la figure suivante



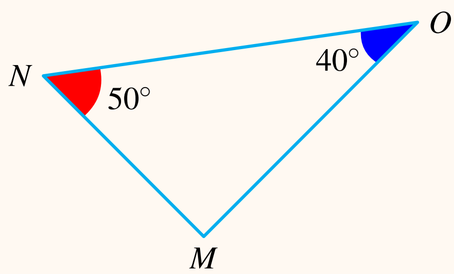
Déterminer la nature du triangle EFG

2. Soit ABC un triangle rectangle en A



Calculer $\widehat{ABC} + \widehat{ACB}$

3. On considère le triangle suivant

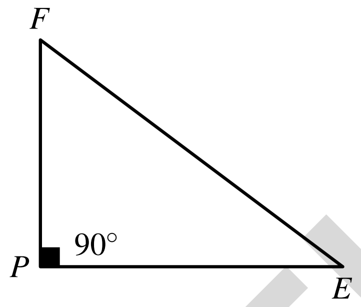


Déterminer la nature de ce triangle

Définition

Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit
Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $[BC]$ est l'hypoténuse , et $[AB]$ et $[AC]$ sont les côtés de l'angle droit

• Exemple



Le triangle PEF est un triangle rectangle en P car $\widehat{EPF} = 90°$

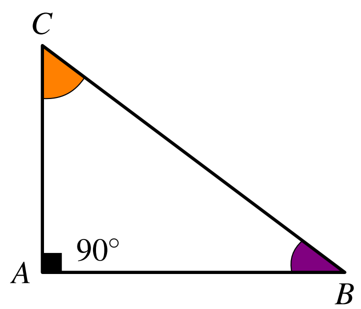
Propriété

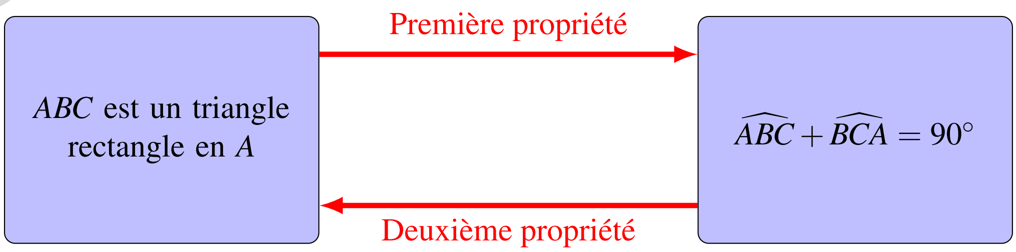
Si un triangle est rectangle, alors ses deux angles aigus sont complémentaires

Propriété

Si un triangle à deux angles complémentaires, alors il est rectangle

• Exemple





Application

Soit EFG un triangle rectangle en F tel que : $FG = 3cm$ et $\widehat{EGF} = 30°$
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{FEG}$

Solution

$\widehat{FEG} + \widehat{FEG} + 90° = 180°$
$\widehat{FEG} = 180° - 90° - 30° = 60°$

2 Triangle isocèle

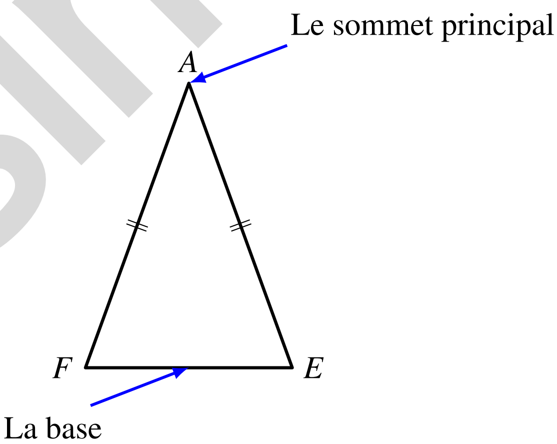
Activité

1. Construire un segment $[AB]$, puis construire sa médiatrice (Δ)
2. Placer un point A sur la droite (Δ) tel que A n'est pas un point de la droite (BC)
3. Quelle est la nature du triangle ABC
4. a. Quel est le symétrique de l'angle $\widehat{ACB}$ par rapport à (Δ)
   b. En déduire que : $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$

Définition

Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côté de même longueur

• Exemple



Le triangle AEF est un triangle isocèle en A car $AE = AF$

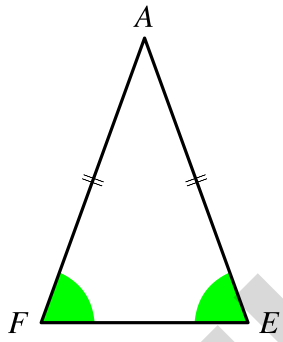
Propriété

Si un triangle est isocèle, alors ses deux angles à la base sont égaux

Propriété

Si un triangle a deux angles égaux, alors il est isocèle

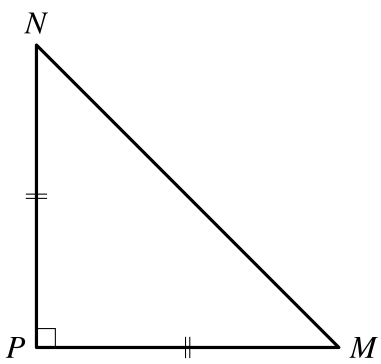
• Exemple



Application

Soit MNP un triangle rectangle et isocèle en P tel que $MP = 4cm$
Calculer la mesure des angles $\widehat{PMN}$ et $\widehat{PNM}$

Solution



$\widehat{PMN} = 45°$ et $\widehat{PNM} = 45°$

✷ ***Cas particulier :***

Un triangle isocèle rectangle, est un triangle qui est à la fois isocèle et rectangle

Propriété

Si un triangle est isocèle rectangle, alors les mesures de ses angles à la base sont égaux à 45°

Propriété

Si $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45°$, alors le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

3 Triangle équilatéral

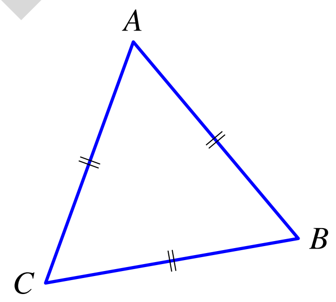
Activité

1. a. Construire un triangle ABC équilatéral tel que $BC = 3cm$
   b. Comparer les mesures des deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$
   c. Comparer les mesures des deux angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$
   d. Quelle est la mesure des trois angles du triangle ABC ?
2. a. Construire un triangle DEF isocèle en D tel que : $\widehat{EDF} = 60°$ et $DE = 4cm$
   b. Déterminer la nature du triangle DEF

Définition

Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont égaux

• Exemple



Le triangle ABC est un triangle équilatéral car $AB = AC = BC$

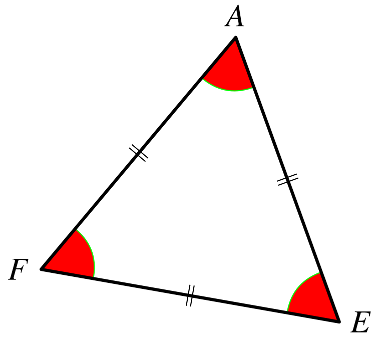
Propriété

Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles sont égaux à 60°

Propriété

Si un triangle a trois angles égaux, alors il est équilatéral

• Exemple



AEF est un triangle équilatéral

Première propriété →

$\widehat{AEF} = \widehat{EFA} = \widehat{EAF} = 60°$

← Deuxième propriété

Application

Aprés avoir effectué les calculs nécessaires, tracer le triangle équilatéral PLM de périmètre $15cm$

Solution

Le triangle PLM a pour longueur de côté $\dfrac{15}{3} = 5cm$

VI Inégalité triangulaire

Activité

(a) Construire 5 bandelettes rectangulaires de largeur environ 4mm et de longueurs respectives : $3cm$, $5cm$, $7cm$, $10cm$ et $12cm$
Tu pourras distinguer ces bandelettes en les coloriant

(b) Peut-tu représenter un triangle :

✸ avec les bandelettes $3cm$, $5cm$, et $7cm$
✸ avec les bandelettes $5cm$, $7cm$, et $10cm$
✸ avec les bandelettes $3cm$, $5cm$, et $12cm$
✸ avec les bandelettes $12cm$, $5cm$, et $7cm$
✸ avec les bandelettes $3cm$, $5cm$, et $10cm$

c Quand c'est possible, construis le triangle correspondant sur ton cahier à l'aide de tes instruments

d Sans réaliser de figure, est-t-il possible de construire un triangle dont les côtés mesurent $21cm$, $25cm$, et $42cm$?

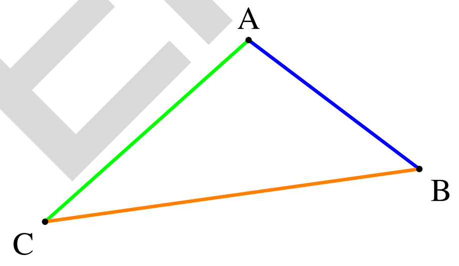
e Essaie d'énoncer une règle générale

Propriété

Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés

Exemple

Dans le triangle ABC on a :
✯ $AB < AC + BC$
✯ $AC < AB + BC$
✯ $BC < AC + AB$



Remarque

On peut interpréter l'inégalité $BC < BA + AC$ en remarquant que le chemin le plus court pour aller du point$B$ au point C c'est la ligne droite

Propriété

✯ Si $A \in [BC]$, alors : $BC = AB + AC$ ✯ Si trois points A, B et C sont tel que : $BC = AB + AC$, alors A appartient au segment $[BC]$
Autrement dit, les points A, B et C sont alignés

Exemple

On a : $MP = ML + LP$

Application

Précise s'il existe un triangle dont les longueurs des côtés sont :

- $17cm$, $5cm$ et $3cm$
- $11mm$, $5mm$ et $6mm$
- $3.5cm$, $4.5cm$ et $5.5cm$

Solution

- ~~oui~~ ou **non** car $17 > 5+3$
- ~~oui~~ ou **non** car $11 = 5+6$ donc les points sont alignés
- **oui** ou ~~non~~