Chapitre

# Calcul de probabilités

## I Expérience aléatoire-Événement - Univers :

### 1 Activité

**expérience 1 :** On lance un dé (cube à six faces numérotés de 1 à 6) et on note le résultat de la face supérieure.Quels sont les résultats possibles ?
**expérience 2 :** On lance une pièce de monnaie 3 fois successives et on note à chaque fois le résultat de la face supérieure.Quels sont les résultats possible ?

### 2 Expérience aléatoire-Eventualité-Univers-Evénement

#### a Définitions et exemples

**expérience aléatoire :** On appelle expérience aléatoire toute expérience dont les résultats possibles sont connus mais on ne peut pas donner le résultat exact de la réaliser.

**Exemple**

expérience 1 et expérience 2
Les résultats possibles de ces deux expériences aléatoires :
**expérience 1 :** $\{1;2;3;4;5;6\}$
**expérience 2 :** $\{FFF,FFP,FPF,FPP,PPP,PPF,PFP,PFF\}$

**Eventualité-Evénement élémentaire :** Chaque cas possible s'appelle éventualité ou événement élémentaire.

**Exercice**

**expérience 1 :** $\{1\}$ est une éventualité
**expérience 2 :** $\{FFP\}$ est une éventualité

**Univers :** les éventualités ( ou les événements élémentaires) constituent un ensemble qu'on appelle univers.On le note $\Omega$
**expérience 1 :** $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
**expérience 2 :** $\Omega=\{FFF,FFP,FPF,FPP,PPP,PPF,PFP,PFF\}$
**Evénement :** toute partie $A$ de $\Omega$ s'appelle événement
**expérience 1 :** $A=\{1,4\}$ est un événement
**expérience 2 :** $B=\{FFP,PPF,FPF\}$ est un événement

## 3 Vocabulaire et notation :

• L'événement $A = \emptyset$ s'appelle événement impossible.
• L'événement $A = \Omega$ s'appelle événement certain.
• $A \bigcap B$ est l'ensemble constitué par des éventualités réalisées à la fois par les deux événements A et B
**expérience 1 :** A=$\{1,3,4\}$ et B=$\{2,3,4,6\}$ alors $A \bigcap B = \{3,4\}$
• $A \bigcup B$ est l'ensemble constitués par des éventualités réalisées par l'événement A ou par l'événement B
**expérience 1 :** A=$\{1,3,4\}$ et B=$\{2,3,4,6\}$ alors $A \bigcup B = \{1,2,3,4,6\}$
• Si $A \bigcap B = \emptyset$ on dit que A et B sont deux événement incompatibles
**expérience 1 :** A=$\{1,3,4\}$ et B=$\{2,6\}$ alors $A \bigcap B = \emptyset$
• Si $A \bigcap B = \emptyset$ et $A \bigcup B = \Omega$ alors B s'appelle l'événement contraire de A,on le note $\bar{B}$ et on a $A = \bar{B}$ et $\bar{A} = B$.On dit que A et B constituent une partition de $\Omega$
**expérience 1 :** A=$\{1,4\}$ l'événement contraire de A est $\bar{A} = \{2,3,5,6\}$
**expérience 2 :** B=$\{$FFP,PPF,PFF$\}$ l'événement contraire de B est $\bar{B} = \{FPP; FPF; PFP; FFF; PPP\}$

# II Notion de probabilité

## 1 Activité

On lance dans l'air une pièce de monnaie et on marque à chaque fois la face supérieur.
On répète cet expérience 100 fois.Ce tableau donne le nombre de réalisations de chaque face :


**1 -** Déterminer l'événement élémentaire qui a la plus grande chance d'être réaliser.
**2 -** Déterminer l'événement élémentaire qui a la plus petite chance d'être réaliser.

**1 -** C'est l'événement élémentaire F qui a la plus grande d'être réaliser.
On dit que la probabilité de l'événement élémentaire F est $\frac{53}{100}$ on écrit $p(F) = \frac{53}{100}$
**2 -** C'est l'événement P qui a la plus petite chance d'être réaliser
On dit que la probabilité de l'événement élémentaire P est $\frac{47}{100}$ on écrit $p(P) = \frac{47}{100}$

D **Définition**

Soit $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ univers des éventualités d'une expérience aléatoire.
Lorsque on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions si $n_i$ est le nombre de fois qu'on a obtenue $x_i$.Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilté de l'événement élémentaire $\{x_i\}$
On note $p_i = p(\{x_i\}) = \frac{n_i}{N}$ on a : $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$
La probabilté d'un événement A est la saomme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent :
si $A = \{x_1, x_3, x_7\}$ alors on a $p(A) = p(\{x_1\}) + p(\{x_3\}) + p(\{x_7\})$

**Exemple**

Dans l'activité précédente $\Omega = \{F, P\}$ donc $p(\{F\}) + p(\{P\}) = 1$

**Propriété**

A et B sont deux événement d'un univers $\omega$ d'une expérience aléatoire

$$\forall A \in \Omega : 0 \leq p(A) \leq 1; \quad p(\Omega) = 1; \quad p(\varnothing) = 0$$
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

## Exercice

Une urne contient 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5
Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne.

1 Déterminer $\Omega$ l' univers des cas possibles.

2 Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

3 Considérons les événements suivants :
A : " La boule tirée est blanche "
B : " La boule tirée porte un numéro supérieur ou égal à 4 "
C : " La boule tirée est verte et porte un numéro pair "
**a-** Calculer $p(A), p(B)$ et $p(C)$
**b-** Déterminer AUB puis montrer que $p(AUB) = p(A) + p(B)$
**c-** A-t-on $p(B$ UC $) = p(B) + p(C)$

4 Considérons les événements suivants :
D : " La boule tirée est verte "
E : " La boule tírée est blanche ou porte un numéro impair "
Calculer $p(D)$ et $p(E)$ en utilisant 3)a)

## III Hypothèse d'équiprobabilité :

**Propriété**

Soit une expérience aléatoire d' univers $\Omega$ ou tout les événements élémentaires ont même probabilité alors probabilité d'un évènement $A$ de $\Omega$ est :

$$p(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$$

### Remarque

L'équiprobabilité est exprimé par les expressions suivantes :
- Les boules sont indiscernables au toucher.
- On lance un dé au hasard
- On lance une pièce de monnaie équilibrée

**Exemple**

On lance au hasard dans l'air un dé et on note le nombre de la face supérieure.
Soit l'événement : $A = \{1,2,5,6\}$ ona $p(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega} = \dfrac{4}{6}$ avec $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

### Exercice

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

1. Déterminer l'univers des cas possibles
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A:" Obtenir au moins deux piles"
   B:" Obtenir face au premier lancer et pile au deuxième lancer "
   C:" obtenir au plus une fois pile"
3. Les deux événements A et C sont-ils incompatibles ?

**Application**

Un sac contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches.
On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

1. Combien y'a-t-il de résultats possibles ?
2. Calculer la probabilité de chaque événement :
   A:" Obtenir 3 boules de même couleur"
   B:" Obtenir 3 boules de couleurs distinctes deux à deux "

C:" Obtenir 3 boules de couleur distinctes"
D:" Obtenir au plus 2 boules rougess"
E:" Obtenir au moins une boule blanche"

# IV Probabilité conditionnelle-indépendance de deux événements :

## 1 Probabilité conditionnelle-indépendance de deux événements

**D Définition**

A et $B$ sont deux événements d'un univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire .
Probabilité de l'événement $B$ sachant que l'événement $A$ est réalisé est $\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

on la note par $p_A(B)$ ou par $p(B/A)$ donc on a $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$
A et $B$ sont deux événements indépendants si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ c'est à dire : $p_A(B)=p(B)$.

**Propriété**

A et $B$ deux évenements non vides c à d : $\mathrm{p(A)}\neq 0$ et $\mathrm{p(B)}\neq 0$
On a : $p(A\cap B)=p(A)p_A(B)=p(B)p_B(A)$

**Exercice**

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 boules noires numérotées $0,0,0,1,1$ 3 boules blanches numérotées 1,1,2 2 boules rouges numérotées 2,2
On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac On considère les deux événements suivants :

A : " les boules tirées ont la même couleur "
B : " les boules tirées portent le même numéro "

1. Calculer $\mathrm{p(A)},\mathrm{p(B)}$ et $\mathrm{p(A\cap B)}$
2. Est-ce que les événements $A$ et $B$ sont indépendants ?
3. Calculer la probabilité de chaque événement : C : " les boules tírées portent le même numéro sachant qu'il ont la même couleur " D : " les boules tirées ont la même couleur sachant qu' il portent le même numéro "

## 2 Expérience composée

D Définition

$A_1$ et $A_2$ sont deux événements d'un univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire et qu forment une partition de $\Omega$ c-à-d $A_1$ et $A_2$ sont disjoints et $A_1 \cup A_2 = \Omega$.
La probabilité d'un événement **B** de $\Omega$ est : $p(B) = p(A_1)\, p_{A_1}(B) + p(A_2)\, p_{A_2}(B)$

# V Variable aléatoire-loi de probabilté

## 1 Variable aléatoire

**Activité**

Un sac contient 6 cartes indiscernables au toucher numérotés de 1 à 6.
On tire au hasard et simultanément 3 cartes au sac.
On associe à chaque tirage le nombre de cartes qui portent un numéro pair.
Cet relation est entre l'ensemble des cas possibles $\Omega$ et l'ensemble $\mathbb{R}$
On la note $X$ et on l'appelle variable aléatoire sur $\Omega$ et on a :

$$\begin{array}{cccc} X & : & \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & A_1 & \mapsto & X(A_1) = x_i \end{array}$$

$x_i$ est le nombre de cartes de numéros pairs pour chaque $A_i$
$x = 0$ : " toutes les cartes tirées portent des numéros impairs "
$x = 1$ : " une seule carte des cartes tirées porte un numéro pair "
$x = 2$ : " deux cartes exactement des cartes tirées porte un numéro pair "
$x = 3$ : " les trois cartes tirées porte un numéros pairs "
Les valeurs du variable aléatoire $x$ sont : 0,1,2,3 et on écrit : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

**Exemple**

Calculer la probabilité de chaque valeur de la variable aléatoire $X$ de l'activité précédente.
On tire simultanément 3 cartes parmi 6 donc $card\Omega = C_6^3 = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

$p(X=0) = \dfrac{card(X=0)}{card\Omega} = \dfrac{C_3^3}{C_6^3} = \dfrac{1}{20}$ ; "$X = 0$" : 3 cartes impairs

$p(X=1) = \dfrac{card(X=1)}{card\Omega} = \dfrac{C_3^1 \times C_3^2}{C_6^3} = \dfrac{9}{20}$ ; "$X = 1$" : 1 carte pair et 2 impairs

$p(X=2) = \dfrac{card(X=2)}{card\Omega} = \dfrac{C_3^2 \times C_3^1}{C_6^3} = \dfrac{9}{20}$ ; "$X = 2$" : 2 carte pair et 1 impairs

$p(X=3) = \dfrac{card(X=3)}{card\Omega} = \dfrac{C_3^3}{C_6^3} = \dfrac{1}{20}$ ; "$X = 3$" : 3 cartes pairs

## 2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

D Définition

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire.
L'ensemble des valeurs de $X$ est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
Loi de probabilité de $X$ : c'est de calculer toutes les probabilités $p(X = x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$
On peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ sous forme d'un tableau :

| $X_i$ | $X_1$ | $X_2$ | .... | $X_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $p(X = x_1)$ | $p(X = x_2)$ | .... | $p(X = x_n)$ |

### Remarque

$p(X = x_1) + p(X = x_2) + p(X = x_3) = ... + p(X = x_n) = 1$

# VI Espérance mathématique-variance-écart type

D Définition

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un univers $\Omega$ d'une expérience aléatoire.
L'ensemble des valeurs de $X$ est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

- Le nombre : $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i.p(X = x_i) = x_1.p(X = x_1) + x_2.p(X = x_2) + ... + x_n.p(X = x_n)$

s'appelle l'espérance mathématiques du variable aléatoire $X$
- Le nombre : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (x_1)^2.p(X = x_1) + (x_2)^2.p(X = x_2) + ... + (x_n)^2.p(X = x_n) - [E(X)]^2$ s'appelle la variance du variable aléatoire X
- Le nombre : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ s'appelle l'écart-type du variable aléatoire X

### Remarque

$V(X) \geq 0$

**Exemple**

Calcule de l'espérance mathématique ;variance et écart-type du variable aléatoire de l'exemple précédent.

| $x_i$ | $x_1=0$ | $x_2=1$ | $x_3=2$ | $x_4=3$ |
|---|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{9}{20}$ | $\frac{9}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |
| $x_i \times p(X=x_i)$ | $0$ | $\frac{9}{20}$ | $\frac{18}{20}$ | $\frac{3}{20}$ |
| $x_i \times p(X=x_i)$ | $0$ | $1^2 \times \frac{9}{20}$ | $2^2 \times \frac{18}{20}$ | $3^2 \times \frac{3}{20}$ |

**L'espérance mathématique de X**

$E(X) = x_1 \times p(X=x_1) + x_2 \times p(X=x_2) + x_3 \times p(X=x_3) + x_4 \times p(X=x_4) \ = 0 + \frac{9}{20} + \frac{18}{20} + \frac{3}{20} = \frac{30}{20}$

**La variance de X**

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (x_1)^2.p(X=x_1) + (x_2)^2.p(X=x_2) + \ldots + (x_4)^2.p(X=x_4) - [E(X)]^2 =$
$0 + 1 \times \frac{9}{20} + 2^2 \times \frac{18}{20} + 3^2 \frac{3}{20} - (\frac{3}{2})^2 = \frac{63}{20}$

**L'écart-type de X**

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{63}{20}}$

## VII Loi binomiale

D **Définition**

Soit p la probabilité d'un événement S d'une expérience aléatoire.
On répète cette expérience $n$ fois.On considère $X$ la variable aléatoire associé au nombre de fois ou l'événement $S$ est réalisé. On a : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
$X$ est appelé loi binomiale ou distribution binomiale de paramètre n et p

**Propriété**

Soit $X$ une loi binomiale de paramètre n et p. On a :

$$E(X) = n.p \text{ et } V(X) = n.p.(1-p)$$

**Exemple**

On considère l'expérience aléatoire de l'exemple précédent.Soit l'événement S:" les trois cartes tirés portent des numéros impairs ". On a $S$ : $(X=0)$ et $p(S) = p(X=0) = \frac{1}{20}$
On répète cette expérience (tirage de 3 cartes simultanément) 4 fois avec les même conditions de départ.
On considère la variable aléatoire X associée au nombre de fois où l'événement S est réalisé.
X est une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{20}$
Calculons l'espérance mathématique et la variance de la loi binomiale X

$$E(X) = n.p = 4 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \text{ et } V(X) = n.p.(1-p) = 4 \times \frac{1}{20} \times (1 - \frac{1}{20}$$