Chapitre

Triangles isométriques et semblables

I Triangles isométriques

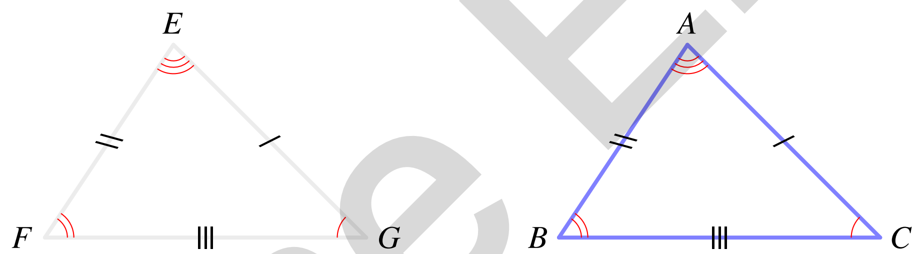
1 Définition

Définition

Deux triangles isométriques sont deux triangles superposables

2 Exemple et vocabulaire

Soit ABC et EFG deux triangles isométriques



✰ Les côtés correspondants (homologues)

- ➥ $[AB]$ et $[EF]$ sont deux côtés correspondants
- ➥ $[AC]$ et $[EG]$ sont deux côtés correspondants
- ➥ $[BC]$ et $[FG]$ sont deux côtés correspondants

✰ Les angles correspondants (homologues)

- ➥ $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EFG}$ sont deux angles correspondants
- ➥ $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EGF}$ sont deux angles correspondants
- ➥ $\widehat{CAB}$ et $\widehat{GEF}$ sont deux angles correspondants

3 Propriété

Si deux triangles sont isométriques, alors :

✰ Leurs côtés correspondants ont la même longueur

✰ Leurs angles correspondants ont la même mesure

• Exemple

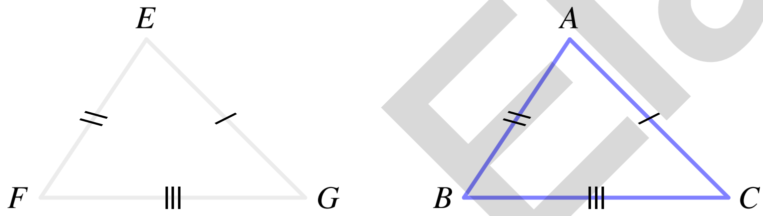
Dans l'exemple précédent, on a :

$$\begin{cases} AB = EF \\ AC = EG \\ BC = FG \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{EFG} \\ \widehat{ACB} = \widehat{EGF} \\ \widehat{BCA} = \widehat{FGE} \end{cases}$$

4 Cas d'isométrie

a cas 1

côté + côté + côté (trois côtés)



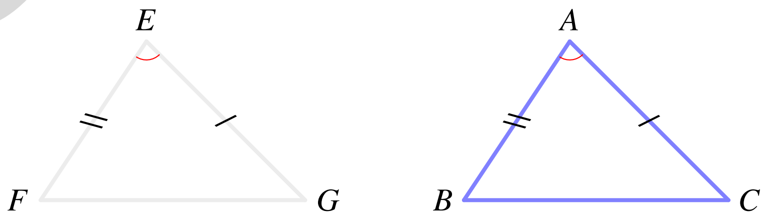
On a $\begin{cases} AB = EF \\ AC = EG \\ BC = FG \end{cases}$ Alors les triangles ABC et EFG sont isométriques

Cas 1

Si deux triangles ont leurs côtés respectivement de même longueur, alors ces deux triangles sont isométriques

b cas 2

côté + côté + angle entre eux (deux côté et un angle)



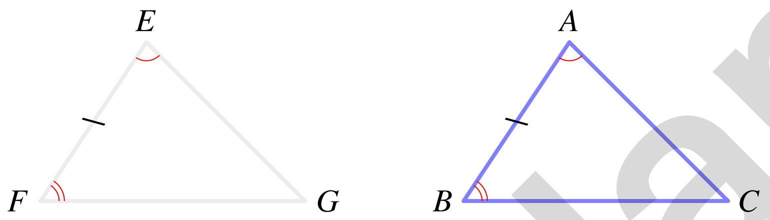
On a $\begin{cases} AB = EF \\ AC = EG \\ \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \end{cases}$ Alors les triangles ABC et EFG sont isométriques

Cas 2

Si deux triangles ont un angles de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors ces deux triangles sont isométriques

c cas 3

angle + angle + côté adjacent au deux (deux angles et un côté)



$$\text{On a } \begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \\ AB = EF \\ \widehat{ABC} = \widehat{EFG} \end{cases} \quad \text{Alors les triangles } ABC \text{ et } EFG \text{ sont isométriques}$$

Cas 3

Si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles de même mesure, alors ces deux triangles sont isométriques

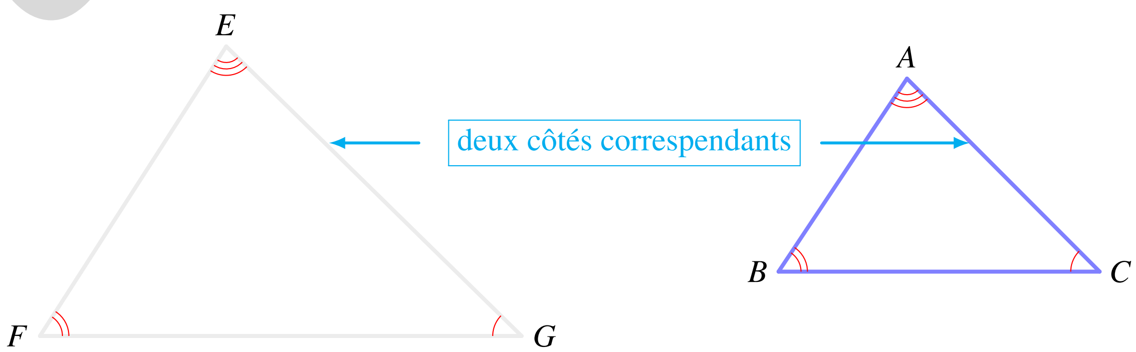
II Triangles semblables

1 Définition

Définition

Deux triangles semblables sont deux triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure

2 Exemple



Dans les triangles ABC et EFG on a : $\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \\ \widehat{ABC} = \widehat{EFG} \\ \widehat{ACB} = \widehat{EGF} \end{cases}$

Donc les triangles ABC et EFG sont semblables

- ★ Les côtés homologues (correspondants) sont : $\begin{cases} [AB] \text{ et } [EF] \\ [AC] \text{ et } [EG] \\ [BC] \text{ et } [FG] \end{cases}$

  mais ils ne sont pas égaux
- ★ Deux triangles isomères sont semblables, mais la réciproque est fausse

3 Propriété

Propriété

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés correspondants sont proportionnelles
Autrement dit, Si ABC et EFG sont deux triangles sont semblables (dans cet ordre)
Alors $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{EG} = \dfrac{BC}{FG} = k$
k est appelé le rapport de similitude

- ★ Dans la figure précédente, on a : $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{EG}{AC} = \dfrac{FG}{BC} = k > 1$

  k s'appelle le rapport de similitude des triangles EFG et ABC dans cet ordre
- ★ Le triangle EFG est un agrandissement du triangle ABC dont le rapport (coefficient) d'agrandissement est $k > 1$
- ★ Dans la figure précédente, on a $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{EG} = \dfrac{BC}{FG} = \dfrac{1}{k} < 1$

  $\dfrac{1}{k}$ est le rapport de similitude des triangles ABC et EFG dans cet ordre
- ★ Le triangle ABC est un réduction du triangle EFG dont le rapport (coefficient) d'réduction est $\dfrac{1}{k} < 1$

4 Cas de similitude

a cas 1

Si deux angles d'un triangle ont la même mesure que deux angle d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables

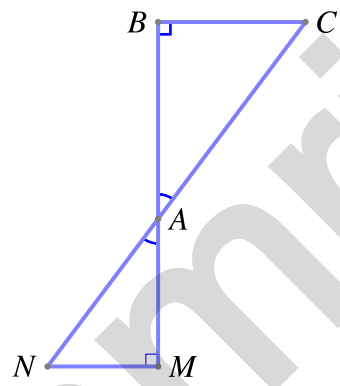
• Exemple

Dans la figure ci-contre, on a :

☆ $\widehat{BAC} = \widehat{MAN}$ car ils sont opposés par le sommet

☆ $\widehat{ABC} = \widehat{AMN} = 30°$ car ils sont deux angles droits

Donc d'après le cas 1 de similitude, les triangles ABC et AMN sont semblables



b cas 2

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés dont les longueurs sont respectivement proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables

Autrement dit : Si ABC et EFG sont deux triangles tel que : $\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \\ \dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{EG} \end{cases}$ alors les triangles ABC et EFG sont semblables

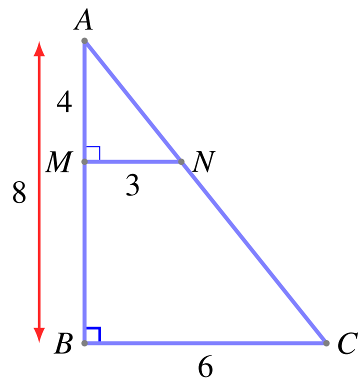
• Exemple

Dans la figure ci-contre, on a :

☆ $\widehat{ABC} = \widehat{AMN} = 90°$ car ils sont deux angles

☆ $\begin{cases} \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$

Donc d'après le cas 2 de similitude, les triangles ABC et AMN sont semblables et le rapport de similitude est $\dfrac{1}{2}$



c cas 3

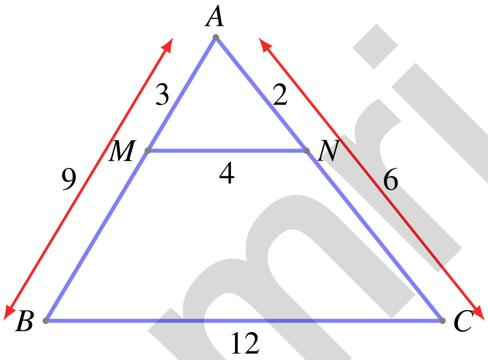
Si deux triangles ont les longueurs de leurs côtés respectivement proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables

Autrement dit : Si ABC et EFG sont deux triangles tel que : $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{EG} = \dfrac{BC}{FG}$ alors les triangles ABC et EFG sont semblables

Exemple

Dans la figure ci-contre, on a :

$$\star \begin{cases} \dfrac{BC}{MN} = \dfrac{12}{4} = 3 \\ \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{9}{3} = 3 \\ \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases} \quad \text{donc } \frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$$



Donc d'après le cas 3 de similitude, les triangles ABC et AMN sont semblables et le rapport de similitude est 3

Cas de similitude

- Cas 1 → angle + angle
- Cas 2 → deux rapport égaux + angle entre eux
- Cas 3 → trois rapport égaux

Remarque

☆ Deux figures sont semblables si elles ont la même forme générale et si l'un est l'agrandissement $(k > 1)$ ou réduction $(k < 1)$ de l'autre

☆ Le rapport de similitude compare entre deux mesures de même unité, il est utilisé, par exemple, pour faire des cartes et des dessins géométriques avec des petites mesures des figures réels. Par exemple, l'echelle $1cm$ pour chaque $100m$ signifie que chaque cm sur la carte présente $100m$ dans la réalité