

Rotation dans le plan



Série d'exercices

Dans tout ce qui suit ($\mathcal{P}$) est le plan orienté positivement

Exercice

1 Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est positive. On considère r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O et d'angle α .

- 1) Déterminer $r_A(A)$, $r_A(B)$ et $r_A(D)$.
- 2) Déterminer une valeur de α pour avoir $r_O(A) = B$. Même question pour avoir $r_O(A) = C$.

Exercice

2 Soit ABC un triangle. On considère D et E deux points à l'extérieur du triangle ABC tels que : ABD et ACE sont deux triangles isocèles et rectangles en A .

- 1) Montrer que : BE et CD
- 2) Montrer que : $(BE) \perp (CD)$.

Exercice

3 Soit ABC un triangle tel que la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est positive. On considère les points D , E , F et G à l'extérieur du triangle ABC tels que $ABDE$ et $ACFG$ sont deux carrés. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Déterminer $r(E)$ et $r(C)$.
- 2) Montrer que : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) [2\pi]$.

Exercice

4 Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ est positive. On considère les deux points I et J qui vérifient : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. Montrer que $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$.

Exercice

5 Soit ABC un triangle isocèles et rectangles en B tel que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ est positive et O le milieu du segment $[AC]$. On considère les deux points E et F vérifiant $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

1) Construire une figure convenable.

2) Déterminer $r(A)$ et $r(B)$.

3) Montrer que : $r(E) = F$.

4) En déduire la nature du triangle OEF .

Exercice

6 Soit ABC un triangle isocèles et rectangles en A tel que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est positive et O le milieu du segment $[BC]$. On considère les deux points D et E vérifiant $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$. Montrer que ODE est un triangle isocèle et rectangle en O .

Exercice

7 Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ est positive. On considère la droite (D) la droite parallèle à (BD) coupant les deux droites (AD) et (AB) respectivement en M et N . Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $r(E) = M$ et $r(F) = N$.

1) Construire une figure convenable.

2) Montrer que $(EF) \perp (MN)$.

3) Déterminer l'image de la droite (BD)

par la rotation r .

4) Montrer que $DN = FA$ et $(EF) \parallel (AC)$.

Exercice

8 Soit ABC un triangle rectangles en A tel que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ est positive noté α . On considère la rotation r de centre B et d'angle α .

1) Construire les points E et F tels que

$$r(A) = E \text{ et } r(C) = F.$$

2) Montrer que $(EF) \perp (BC)$.

3) Soit $(AC) \cap (EF) = \{I\}$ et $r(I) = J$.

a) Montrer que les points E, F et J

sont alignés.

b) Montrer que le point E est le milieu du segment $[EF]$.

4) Soit $(AB) \cap (IJ) = \{K\}$. Montrer que

$$r(K) = C.$$

Exercice

9 Soit $ABCD$ un carré tel que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est positive. On considère la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Décomposer la rotation r en composée de deux symétries orthogonales.

2) Déterminer la nature de la transformation suivante $S_{(AD)} \circ S_{(AB)}$.

3) on considère les rotations suivantes : Soit $r(A; \frac{\pi}{2})$, $r'(B; \frac{\pi}{2})$ et $r''(C; \frac{\pi}{2})$. Déterminer la nature des deux transformations suivantes : $r \circ r'$ et $r \circ r''$.

Exercice

10 Soit ABC est un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Soit O le centre de gravité du triangle ABC et le point I le milieu du segment $[IJ]$.

1) Déterminer une droite (D) tel que $r(B; -\frac{\pi}{3}) = S_{(D)} \circ S_{(BO)}$.

2) Déterminer les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) tel que : $r(O; \frac{\pi}{3}) = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)}$.

3) Déterminer la nature de la transformation suivante : $S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$.

Exercice

11 Soit ABC est un triangle équilatéral de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1) Montrer que $r(A) = B$ et $r(B) = C$

2) En déduire $r([AB])$.

3) Soit M un point du segment $[AB]$ et N un point du segment $[BC]$ tels que $BP = AM$.

a) Montrer que $r(M) = P$ et en déduire que $OM = OP$.

b) Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}})$.

c) Calculer la distance MP en fonction de OM .

d) Déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$ pour que la distance MP soit minimale.

Exercice

12 Soit ABC est un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Soit M un point à l'intérieur du triangle ABC . On note H_C , H_B et H_A les projetés orthogonaux de M sur les segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ respectivement.

1) Soit r_1 la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Posons : $M' = r_1(M)$.

a) Montrer que BMM' est un triangle équilatéral.

b) Notons H' le projeté orthogonale de M' sur le segment $[AB]$. Montrer que : $M'H' = MH_A$.

2) Considérons la droite (Δ) tel que $(\Delta) \parallel (AB)$ et $M' \in (\Delta)$; soit $(\Delta) \cap (MH_C) = \{N\}$. Montrer que $MN = MH_A + MH_C$.

3) Soit $r_2 = r(M, \frac{\pi}{3})$. Montrer que $B \in r_2((\Delta))$.

4) Déduire que : $MH_A + MH_B + MH_C = AH_A = BH_B = CH_C$.