Chapitre

Rotation dans le plan

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
► On définira une rotation à partir de son centre et de son angle ; ► L'introduction des coordonnées et de l'expression analytique d'une rotation est hors programme.	► Utiliser une rotation donnée dans une situation géométrique ; ► Construire les images de figures usuelles par une rotation donnée ; ► Reconnaitre une rotation et l'utiliser pour résoudre des problèmes géométriques (déterminer des lieux géométriques, construction géométriques ...) ; ► Reconnaitre des figures isométriques en utilisant une rotation.

Avant propos

Une transformation géométrique est une bijection du plan dans lui-même, c'est-à-dire une manière d'associer à chaque point un autre point, de telle manière que tout point soit l'image d'un autre point, et que deux points différents aient des images différentes. Les transformations auxquelles on va s'intéresser conservent la plupart des propriétés géométriques intéressantes. Par exemple, toutes envoient une droite sur une droite, un cercle sur un cercle, un angle de 42° sur un angle de 42°, un carré sur un carré et ainsi de suite... Le fait de s'intéresser aux transformations qui préservent certaines propriétés est un élément essentiel de la géométrie "moderne" (c'est-à-dire celle pratiquée depuis le $XIXe$ siècle) que vous rencontrerez si vous continuez des études en mathématiques. Cependant, les transformations du plan sont aussi très utiles dans la résolution de problèmes de géométrie plus élémentaires. **Dans tout ce qui suit** $(\mathscr{P})$ **est le plan orienté positivement**

I Rotation - Rotation réciproque

1 Rotation

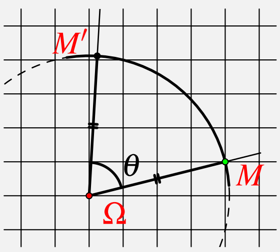
Activité

Soit Ω un point fixe du plan $(\mathscr{P})$. On considère un distinct point M de Ω.

1. Construire le cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon la distance ΩM.
2. Soit (Δ) la droite passant par Ω et orthogonale à la droite (ΩM). Combien y-a-t-il de points M' du plan tel que : $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
3. Construire le point M'' du plan tel que : $\Omega M = \Omega M''$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M''}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Définition

Soit Ω un point fixe du plan $(\mathscr{P})$ et un réel θ. La **rotation** de **centre** Ω et d'**angle** θ est la transformation du plan, qui associe à tout point M du plan un point M' défini par :



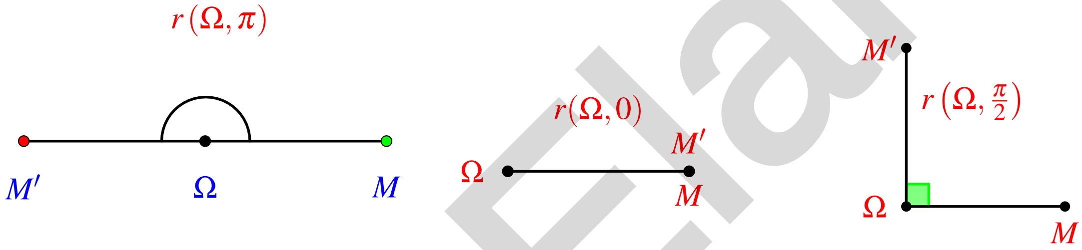
- Si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$.

▶ Si $M \neq \Omega$, alors : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$

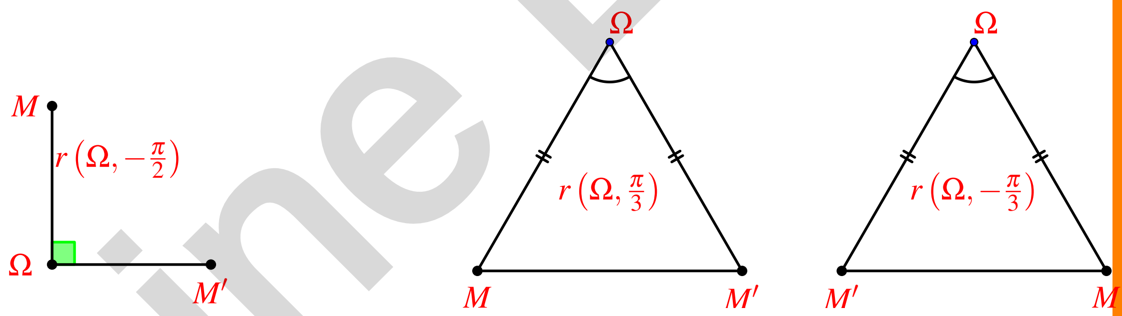
On note cette rotation par $r\,(\Omega,\theta)$, ou simplement r, s'il n y a pas d'ambiguïté.

Exemple

Soit M et M' deux points du plan $(\mathscr{P})$. On considère la rotation $r\,(\Omega,\theta)$ telle que $r(M) = M'$.



▶ On a :



▶ La rotation de centre Ω et d'angle $\theta \equiv 0\,[2\pi]$ est l'application identité du plan. Autrement dit : $\boxed{r\,(\Omega,0) = Id_{(\mathscr{P})}}$.

▶ La rotation de centre Ω et d'angle $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$ est la symétrie centrale de centre Ω. Autrement dit : $\boxed{r\,(\Omega,\pi) = S_{\Omega}}$.

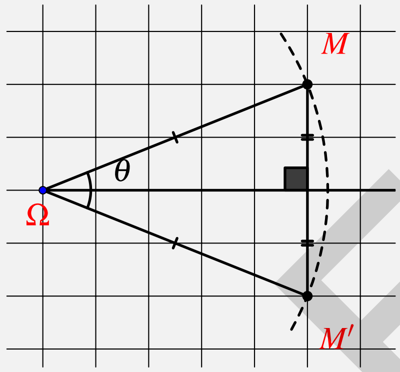
▶ Si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Alors : $r(M) = M'$, si et seulement si, le triangle $\Omega MM'$ est un triangle isocèle et rectangle en Ω et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On dit que la rotation r est le quart de tour direct de centre Ω.

▶ Si $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Alors : $r(M) = M'$, si et seulement si, le triangle $\Omega MM'$ est un triangle isocèle et rectangle en Ω et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On dit que la rotation r est le quart de tour indirect de centre Ω.

▶ Si $\theta \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Alors : $r(M) = M'$, si et seulement si, le triangle $\Omega MM'$ est un triangle équilatéral en Ω et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

- Si $\theta \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Alors : $r(M) = M'$, si et seulement si, le triangle $\Omega MM'$ est un triangle équilatéral en Ω et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Remarque



Si $\theta \neq 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors Ω le centre de la rotation r est l'unique point invariant par cette rotation, et dans ce cas : Pour tout point M du plan tel que $M \neq \Omega$ et $r(M) = M'$, On a :

- Le point M' appartient au cercle de centre Ω et de rayon la distance ΩM ;
- La médiatrice du segment $[MM']$ passe par le point Ω.
- Le triangle $\Omega MM'$ est isocèle de sommet Ω.

Application

1. Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Déterminer l'angle de la rotation de centre B et qui transforme A en C.
2. a. Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et I le centre de gravité du triangle ABC. On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   b. Montrer que $r(A) = B$, $r(B) = C$ et $r(C) = A$
   c. Soit A' le milieu du segment $[BC]$. Déterminer $r(A')$.
3. Soit $ABCD$ un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Soit K et L respectivement les milieux des segments $[CD]$ et $[AD]$. Déterminer le centre et l'angle de la rotation r dans chacun des cas

suivants :

a $r(A) = B$ et $r(B) = A$.

b $r(A) = D$ et $r(L) = K$.

2 Rotation réciproque d'une rotation

Activité

Soit Ω un point fixe du plan $(\mathscr{P})$ et θ un réel. On considère la rotation $r = r(\Omega, \theta)$ et le point M', image du point M par la rotation r avec $M \neq \Omega$.

1. Montrer que : $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M'}; \overrightarrow{\Omega M}\right) \equiv -\theta\,[2\pi]$.
2. En déduire que la transformation r' qui transforme M' en M est une rotation, dont on déterminera ces caractéristiques.
3. Que représente la rotation r' pour la rotation r.

Proposition

Soit Ω un point fixe du plan $(\mathscr{P})$ et θ un réel. La rotation **réciproque** de la rotation $r = r(\Omega, \theta)$ est la rotation $r(\Omega, -\theta)$ de centre Ω et d'angle θ, qu'on note r^{-1}.

Application

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer $r(A)$ puis en déduire $r^{-1}(D)$.
2. Déterminer $r^{-1}(C)$ puis en déduire $r(D)$.

3 Composition de deux symétries orthogonale et la décomposition d'une rotation

Activité

Soit $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta')}$ deux symétries orthogonales respectivement d'axes (Δ) et (Δ').

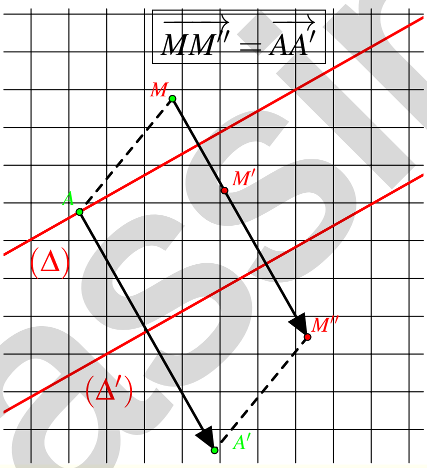
1. On suppose que $(\Delta) = (\Delta')$. Déterminer l'application $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$.
2. On suppose que $(\Delta) // (\Delta')$. On considère une droite $(D) \perp (\Delta)$ et soit I et J les deux points d'intersection de (D) respectivement avec (Δ) et (Δ').
   a. Soit M un point du plan $(\mathscr{P})$. On considère les deux points M' et M'' tels que $S_{(\Delta)}(M) = M'$ et $S_{(\Delta)}(M') = M''$. Montrer que $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{IJ}$.
   b. En déduire la nature de l'application $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$.
3. On suppose que (Δ) et (Δ') sont sécantes en un point Ω. On considère les deux points M' et M'' tels que $S_{(\Delta)}(M) = M'$ et $S_{(\Delta)}(M') = M''$. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement deux vecteurs directeurs de (Δ) et (Δ'). On pose $\alpha \equiv (\vec{u}, \vec{v})\,[2\pi]$.
   a. Montrer que : $\Omega M'' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M''}\right) \equiv 2\alpha\,[2\pi]$.
   b. En déduire la nature de l'application $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$.
4. Soit $r = r(\Omega, \theta)$ où Ω un point du plan et θ un réel. On considère une droite (Δ) passant par le point Ω et la droite $(\Delta') = r_1((\Delta))$ avec $r_1 = r\left(\Omega, \frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que $r = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$. (On admet que l'image d'une droite par une rotation est une droite)

T Théorème

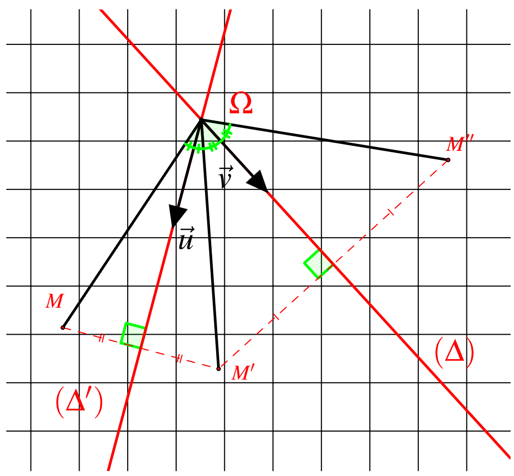
Soit Ω un point fixe, (Δ) et (Δ') deux droites du plan $(\mathscr{P})$ et θ un réel. On considère les deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Si $(\Delta)//(\Delta')$, alors $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$ est la **translation** de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ où A est un point quelconque de la droite (Δ) et $A' = S_{(\Delta)}(A)$.
2. Réciproquement, toute translation t de vecteur non nul $\vec{u}$ est décomposable en deux symétries orthogonales d'axes parallèles, dont l'un est quelconque et l'autre est son image par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ ou $-\frac{1}{2}\vec{u}$.
3. Si (Δ) et (Δ') sont sécantes en Ω, alors l'application $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta \equiv 2\left(\overrightarrow{\vec{u}};\overrightarrow{\vec{v}}\right)[2\pi]$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement les vecteurs directeurs de (Δ) et (Δ').
4. Réciproquement, toute rotation $r = r(\Omega, \theta)$ s'exprime comme composée de deux symétries orthogonales d'axes deux droites sécantes, dont l'un est quelconque et l'autre est son image par la rotation $r_1 = r_1\left(\Omega, \frac{\theta}{2}\right)$.

Illustration Géométrique



a **Composée de symétrie orthogonale**



b **Composée de symétrie orthogonales d'axes sé**

Exemple

1. Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Déterminer la nature de l'application $f = S_{(CD)} \circ S_{(AC)}$

2 Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On note (Δ_A) la hauteur du triangle ABC issue du sommet A. Montrer que $r\left(A,\frac{\pi}{3}\right) = S_{(\Delta_A)} \circ S_{(AB)} = S_{(AC)} \circ S_{(\Delta_A)}$.

Application

1 oit ABC un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

a Déterminer une mesure de chacun des angles $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$.

b Déterminer puis tracer les droites (Δ), (Δ'), (Δ_1) et (Δ_2) telles que :
$r\left(O,-\frac{2\pi}{3}\right) = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(OA)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(OB)}$ et $r\left(A,\frac{\pi}{3}\right) = S_{(\Delta')} \circ S_{(AB)} = S_{(AC)} \circ S_{(\Delta)}$

2 a Déterminer $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ lorsque $(\Delta) \perp (\Delta')$.

b Soit (Δ) et (Δ') deux droite parallèles et (D) une droite perpendiculaire à (Δ) et (Δ'). Déterminer : $S_{(D)} \circ S_{(\Delta)}$; $S_{(\Delta')} \circ S_{(D)}$; $\left(S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}\right) \circ \left(S_{(D)} \circ S_{(\Delta)}\right)$.

3 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et A et B deux points distincts de $(\mathscr{C})$. Soit M un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et B. On note (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives des segments $[AM]$ et $[BM]$. Déterminer $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ et $S_{(BM)} \circ S_{(AM)}$.

4 Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Montrer que r est la composée de deux symétries orthogonales dont on déterminera les axes.

II Propriétés de la rotation

Dans tout ce qui suit r est la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Activité

1 Soit A et B sont deux points du plan $(\mathscr{P})$, distinct de Ω. On pose $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.

1 Montrer que : $\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega A'};\overrightarrow{\Omega B'}\right)\,[2\pi]$.

2 a Écrire $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$.

b En utilisant le théorème d'Alkashi, exprimer AB^2 en fonction de ΩA, ΩB et

$\cos\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)$.

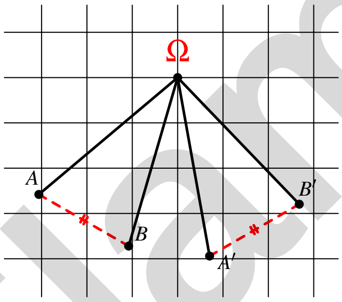
3 En déduire que $A'B' = AB$.

Proposition

Soit A et B deux points du plan $(\mathscr{P})$.

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ alors $AB = A'B'$.

On dit que la rotation **conserve la distance**.



Exemple

Soit $ABCD$ et $DEFA$ deux carrés comme le montre tels que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Soit M un point du segment $[AB]$. Le cercle de centre A et passant par le point M coupe le segment $[AD]$ au point N et le segment $[AF]$ au point P.

1 Construire une figure convenable.

2 Montrer que : $DM = NF$ et $CN = EP$.

1 Conservation des mesures des angles orientés

Activité

2 Soit A, B, C et D quatre points du plan $(\mathscr{P})$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Soit A', B', C' et D' les images respectives des points A, B, C et D par la rotation r.

- On suppose que A et B sont distincts de Ω et $A \neq B$. On considère le point C distinct de Ω tel que ΩABC est un parallélogramme et le point O le centre de ΩABC. On pose $r(O) = O'$ et $r(C) = C'$.

  1 Construire une figure convenable.

  2 Montrer que O' est le milieu des segments $[\Omega B']$ et $[C'A']$.

  3 En déduire la nature du quadrilatère $\Omega A'B'C'$.

4 Montrer que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega C'}\right)[2\pi]$. En déduire que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$.

- On suppose que $A \neq B$ et $A \neq C$.

1 Montrer que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) + \left(\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{AC}\right) \equiv 0\,[2\pi]$.

2 Montrer que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}\right)[2\pi]$.

3 En déduire que si les points A, B et C sont alignés alors il en est de même pour les points A', B' et C'.

- Montrer que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)[2\pi]$.

Proposition

2 Soit A et B deux points distincts du plan $(\mathscr{P})$. Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ alors $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$.

Exemple

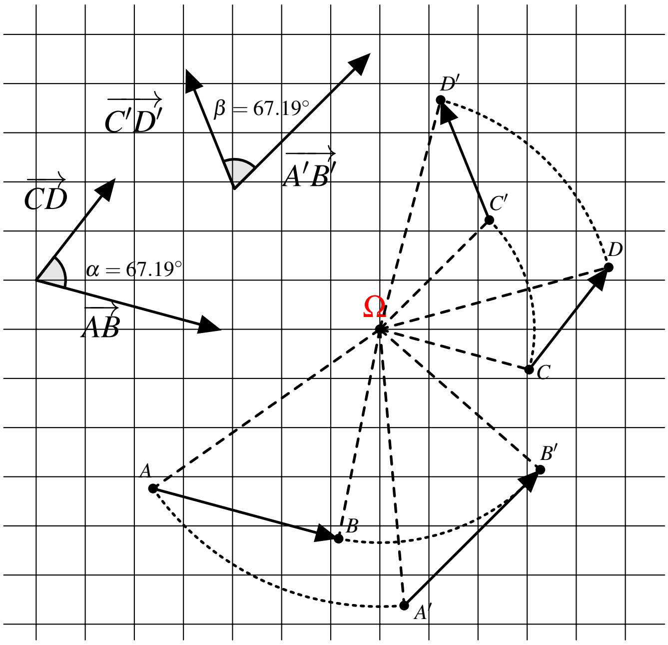
Soit ABC un triangle. On considère deux triangles ABD et ACE rectangles et isocèles au sommet commun A. Montrer que $(BE) \perp (CD)$

Remarque

La proposition précédente permet de déterminer l'angle d'une rotation à partir de deux points distincts et leurs images.

Proposition

Soit A, B, C et D quatre points du plan $(\mathscr{P})$ tels que $A \neq C$ et $C \neq D$ et A', B', C' et D' leurs images respectives par la rotation r. Alors $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)[2\pi]$.
On dit que la rotation conserve les mesures des angles orientés.



• Exemple

Soit ABC un triangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[\pi]$. Soit D le symétrique du point B par rapport à la droite (AC) et E le symétrique du point C par rapport à la droite (AD). Montrer que $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA}\right)\,[2\pi]$.

2 Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Activité

Soit A, B, C et D quatre points du plan $(\mathscr{P})$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ où $k \in \mathbb{R}^*$.Soit A', B', C' et D' les images respectives des points A, B, C et D par la rotation r.

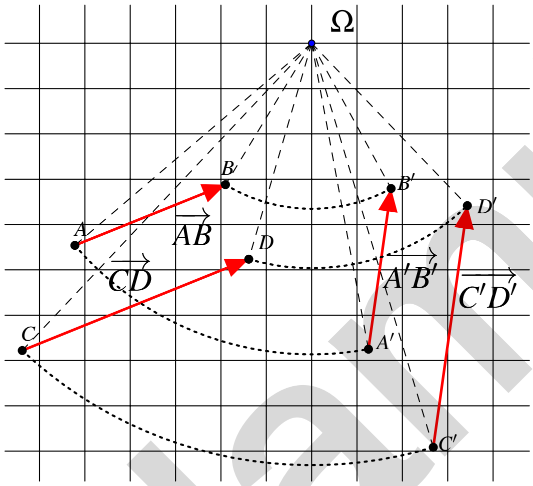
1. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)$ suivant le signe du réel k.
2. a. On suppose que $k > 0$. Montrer que $A'B' = kC'D'$ et $\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right) \equiv [2\pi]$, puis déduire que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.
   b. Montrer que si $k > 0$ on a $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

Proposition

Soit A, B, C et D quatre points du plan $(\mathscr{P})$ tels que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Si $r(A) = A'$, $r(B) = B'$, $r(C) = C'$ et $r(D) = D'$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$.

On dit que la rotation conserve le co-efficients de colinéarité de deux vecteurs.



Conséquences

La rotation conserve aussi l'alignement de trois points ainsi que le barycentre de deux points pondérés

Remarque

- La rotation conserve le barycentre de trois ou quatre points pondérés.
- La rotation conserve le milieu d'un segment ainsi que le centre de gravité d'un triangle.

Exemple

Soit $ABCD$ un carré et AED et AFB deux triangles équilatéraux tels que le point F est à l'extérieur et le point E est à l'intérieur de $ABCD$. On considère la rotation $r = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$, on pose $r(C) = K$.

1. Montrer que $r(B) = F$ et $r(D) = E$.
2. Montrer que les points B, D et K sont alignés.
3. En déduire que les points E, C et F sont alignés.

Application

Soit ABC un triangle tel que la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ est positif. On construit en dehors du triangle ABC les carrés $ACDE$, $BAFG$ et $CBHI$.

1. En utilisant une rotation convenable, montrer que $(AI) \perp (BD)$.

2 montrer que $(AH) \perp (CG)$.

3 On considère la rotation $r = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$. Soit J le milieu du segment $[EF]$ et on pose : $r(J) = J'$.

a Montrer que le point J' appartient à la droite passant par le point A et parallèle à la droite (BC).

b En déduire que la droite (AJ) est une hauteur du triangle ABC.

Application

Soit $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés tels que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AG}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AE = AB$.

1 Soit r la rotation de centre A et transformant le point B en E.

a Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r. Montrer que : $r(C) = F$ et $r(D) = G$.

b Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}}\right)$.

2 Soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;-1)$. On pose : $r(G) = G'$. Montrer que les points G, F et G' sont alignés.

III Image de certaines figures par une rotation

Activité

$A)$ **Image d'une droite par une rotation**. Soit r une rotation et (Δ) une droite du plan $(\mathscr{P})$. Soit A et B deux points distincts de la droite (Δ) et A' et B' leurs images respectives par la rotation r. Soit M un point de (Δ) tel que $M \neq A$ et $M \neq B$ et $M' = r(M)$.

1) $a)$ Montrer que $A' \neq B'$. On pose $(\Delta') = (A'B')$.

$b)$ Montrer que $M \in (\Delta) \iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) \equiv 0[\pi]$

$c)$ En déduire que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) \equiv 0[\pi]$. Conclusion : $\boxed{(\forall M \in (\Delta))\ r(M) \in (A'B')}$

2) Réciproquement :

$a)$ Soit N' un point de la droite (Δ'). Montrer qu'il existe un point N de la droite (Δ) tel que $r(N) = N'$.

$b)$ En déduire que $(\Delta') \subset r((\Delta))$

3) En déduire que $r((\Delta)) = (\Delta)$

$B)$ **Image d'un segment par une rotation**. Soit M un point du plan $(\mathscr{P})$ tel que $MA + MB = AB$ et $M' = r(M)$.

1) Montrer que $M'A' + M'B' = A'B'$.

2) En déduire que $r([AB]) = [A'B']$.

$C)$ **Image d'un cercle par une rotation**. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}(O;R)$ et $M' = r(M)$ et $O' = r(O)$ où O est un point et $R \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $M \in \mathscr{C}(O;R) \Longrightarrow M' \in \mathscr{C}(O';R)$.

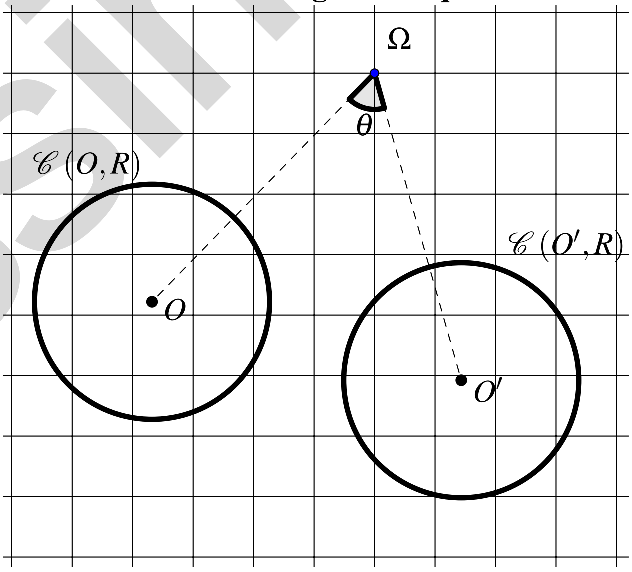
2) Soit $N' \in \mathscr{C}(O';R)$. Montrer qu'il existe un point $N \in \mathscr{C}(O;R)$ $r(N) = N'$.

3) En déduire que l'image du cercle $\mathscr{C}(O;R)$ est le cercle $\mathscr{C}(O';R)$.

Proposition

L'image du cercle $\mathscr{C}(O;R)$ est le cercle $\mathscr{C}(O';R)$ où $O' = r(O)$.

Illustration géométrique

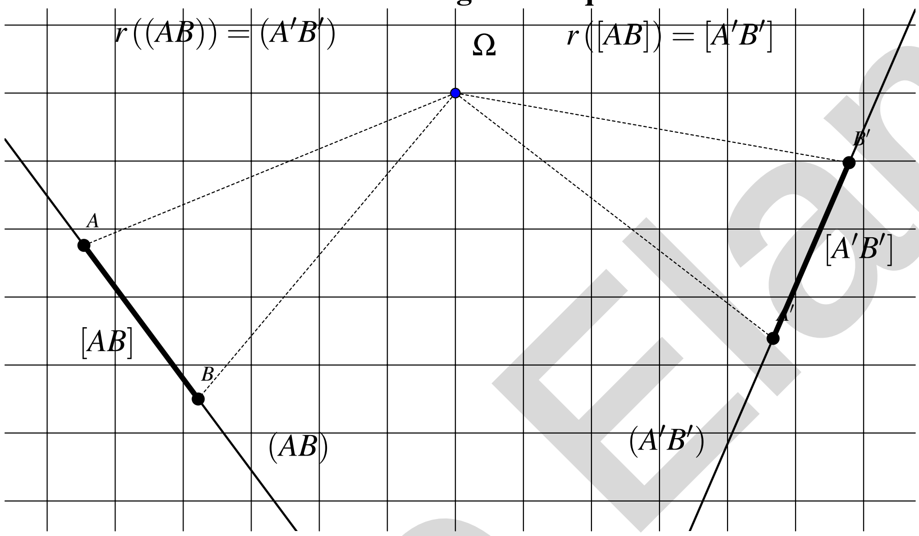


Proposition

2 Soit A et B deux point du plan $(\mathscr{P})$. Si $r(A)=A'$ et $r(B)=B'$ alors :

$$r((AB))=(A'B') \quad \text{et} \quad r([AB])=[A'B'] \quad \text{et} \quad r([AB))=[A'B')$$

Illustration géométrique



• Exemple

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et I le milieu du segment $[BC]$. On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre C et passant par I. On pose $(\mathscr{C}')=r((\mathscr{C}))$

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que : $r(A)=B$ et $r(C)=A$.
3. Soit E et F deux point du plan tels que $\{E\}=(AC)\cap(\mathscr{C})$ et $\{F\}=(AB\cap)(\mathscr{C}')$. Montrer que : $r(E)=F$

Remarque

- La rotation conserve la parallélisme, c.à.d l'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- La rotation conserve l'orthogonalité, c.à.d l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
- l'image d'un triangle isocèle par une rotation est un triangle isocèle.

- l'image d'un triangle rectangle par une rotation est un triangle rectangle
- l'image d'un triangle équilatéral par une rotation est un triangle équilatéral.
- L'image d'un rectangle par une rotation est un rectangle.
- Si (F_1) et (F_2) deux figures géométriques, alors $r((F_1)\cap(F_2)) = r((F_1))\cap((F_2))$.

Application

soit $ABCD$ un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit I un point du segment $[BD]$ et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre I et de rayon IA. Le cercle $(\mathscr{C})$ coupe la droite (AB) en J et la droite (AD) en K. Construire une figure convenable. Puis Montrer que $BJ = DK$ et $(CI)\perp(JK)$.

IV Composition de deux rotations

Activité

A) **Composée de deux rotation de même centre**

Soit r et r' deux rotations de même centre I et d'angles respectives θ et θ'. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f = r\circ r'$.

1) Déterminer $f(I)$.
2) Soit M le point du plan tel que : $M \neq I$. On pose $M' = r(M)$ et $M'' = r'(M')$.
   - Montrer que : $IM = IM''$.
   - Montrer que : $\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM''}\right) \equiv \theta+\theta'[2\pi]$.
   - En déduire la nature de l'application f en donnant ces caractéristiques.

B) **Composée de deux rotation de centres différents**

Soit r ma rotation de centre I et d'angle θ et r' la rotation de centre J et d'angle θ' avec θ et θ' non nuls et $I\neq J$. On pose : $(\Delta) = (IJ)$ et soit (r_1) la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\theta}{2}$. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f = r\circ r'$.

1) Montrer que : $r = S_{(\Delta)}\circ S_{(\Delta_1)}$.

2) Soit (Δ_2) l'image de la droite (Δ) par la rotation de centre J et d'angle $\frac{\theta'}{2}$. Montrer que $r = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}$.
3) En déduire la nature de l'application f en donnant ces caractéristiques.

T Théorème

Soit $r(\Omega, \theta)$ et $r'(\Omega', \theta')$ deux rotations du plan d'angles non nuls.

- Si $\Omega = \Omega'$ alors $r \circ r'$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta + \theta'$. De plus, On a dans ce cas : $r \circ r' = r' \circ r$.
- Si $\Omega \neq \Omega'$ et $\theta + \theta' \not\equiv [2\pi]$ alors $r \circ r'$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta + \theta'$.
- $\Omega \neq \Omega'$ et $\theta + \theta' \equiv [2\pi]$ alors $r \circ r'$ est une translation.

Remarque

Dans le cas où $\Omega \neq \Omega'$ et $\theta + \theta' \equiv [2\pi]$, alors pour déterminer le vecteur de la translation, il suffit de déterminer l'image d'un point connu par la translation $r \circ r'$. Si par exemple $r \circ r'(O) = O'$ avec O un point connu, alors le vecteur de la translation est $\overrightarrow{OO'}$, c.à.d $r \circ r' = t_{\overrightarrow{OO'}}$.

Application

Soit Ω_1 et Ω_2 deux point du plan $(\mathscr{C})$. Déterminer la nature de l'application $r_2 \circ r_1$ en précisant ses éléments caractéristiques dans chacun des cas suivants :

<u>1^{er} **cas :**</u> $r_1 = r\left(\Omega_1; \frac{\pi}{6}\right)$ et $r_2 = r\left(\Omega_1; -\frac{\pi}{4}\right)$.

<u>2^{me} **cas :**</u> $r_1 = r\left(\Omega_1; \frac{5\pi}{6}\right)$ et $r_2 = r\left(\Omega_2; \frac{7\pi}{6}\right)$

<u>3^{me} **cas :**</u> $r_1 = r\left(\Omega_1; \frac{\pi}{3}\right)$ et $r_2 = r\left(\Omega_2; -\frac{\pi}{4}\right)$

<u>4^{me} **cas :**</u> $r_1 = r\left(\Omega_1; \frac{5\pi}{6}\right)$ et $r_2 = r\left(\Omega_2; -\frac{5\pi}{6}\right)$