

CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

Dans tous ce qui suis le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on note I et J les points tel que : $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$

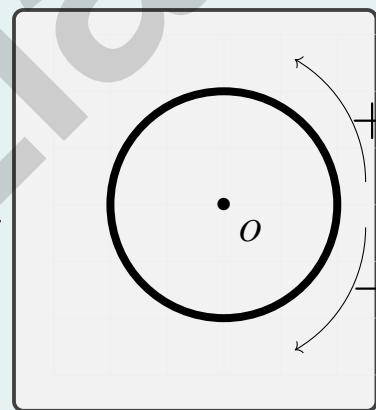


Le cercle trigonométrique

1 Cercle orienté et plan orienté.

Définition

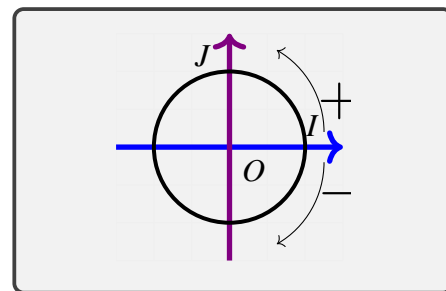
- Soit (C) un cercle sur le plan
Le cercle (C) est dit orienté si on choisit sur (C) un sens positif, appelé aussi sens direct.
- On choisit en général le sens positif, le sens contraire de rotation des aiguilles d'une montre, l'autre sens est appelé sens négatif ou indirect.
- Orienter le plan, c'est faire le choix du même sens de parcours pour tous les cercles du plan.



2 Cercle trigonométrique

Définition

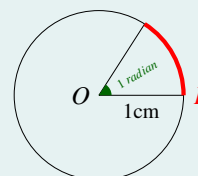
Le cercle trigonométrique lié au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est le cercle de centre O et de rayon égal à l'unité de longueur, orienté dans le sens positif.



3 Le radian

Définition

Un radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur le cercle un arc de longueur égal à l'unité de longueur c'est à dire égal au rayon du cercle trigonométrique.



Remarque

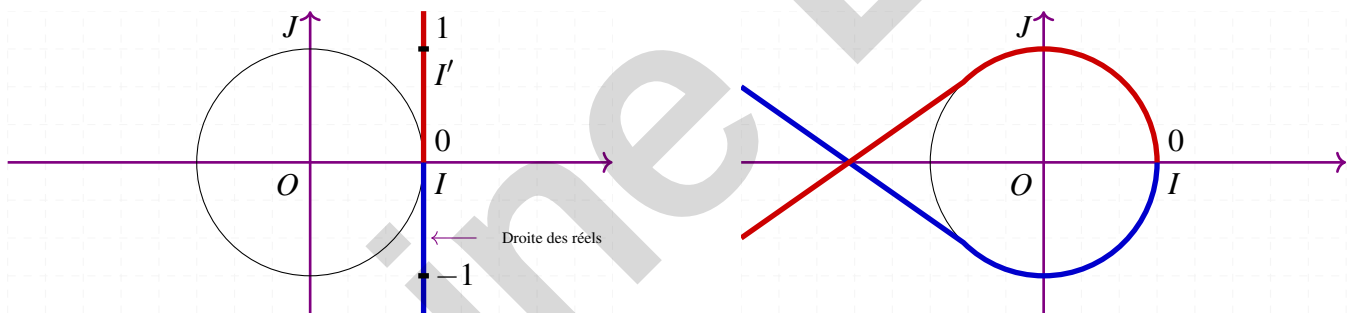
- ▶ Il existe une unité de mesure des angles autre que le radian et le degré, elle est appelée le grade. Un angle plat mesure π rd; 180° et 200 grade
- ▶ Si x, y et z sont respectivement les mesures en radian, en degré et en grade d'un angle géométrique alors : $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$.



Abscisses curvilignes - Abscisse curviligne principale

Définition

- ▶ Lorsque le zéro de la droite des réels coïncide avec le point I sur le cercle trigonométrique.
- ▶ On enroule la demi-droite des réels positifs sur le cercle trigonométrique dans le sens positif et la demi - droite des réels négatifs dans le sens négatif.
- ▶ Chaque point M du cercle va coïncider avec une infinité de nombres réels tous appelés abscisses curvilignes du point M



Remarque

Le périmètre du cercle trigonométrique est égal à $2\pi \times 1 = 2\pi$

Propriété

- ▶ Si x et x' sont deux abscisses curvilignes d'un même point M du cercle trigonométrique Alors $x' = x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- ▶ Il existe une seule abscisse curviligne de M appartient à $]-\pi, \pi]$, s'appelle abscisse curviligne principale du point M



Angles orientés

1 Angles orientés

Définition

- ▶ On considère le plan orienté et O, M et N trois points distincts du plan le couple $([OM] : [ON])$ s'appelle l'angle orienté des deux demi-droites $[OM]$ et $[ON]$ et on note $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$
- ▶ Si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ alors l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ est l'angle orienté des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété

- ▶ soient O, M, N et P quatre points du plan orienté.
- ▶ L'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM})$ est nul $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$ relation de CHASLES
- ▶ soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls
- ▶ L'angle $(\vec{u}, \vec{u})$ est nul. $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$ relation de CHASLES

2 Mesure d'un angle orienté

Définition

- ▶ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ; M et N les points du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ et A et B les points d'intersection respectifs du cercle trigonométrique avec chacun des demi-droites $[OM]$ et $[ON]$.
- ▶ On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ les réels $(b - a)$ où a et b sont des abscisses curvilignes respectifs des points A et B sur le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$.
- ▶ On considère un cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ de centre O lié au repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et A un point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse curviligne x le nombre réel x est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ noté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$.

Propriété

soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls et $k \in \mathbb{R}$

- ▶ $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v})[2\pi]$
- ▶ $(-\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v})[2\pi]$
- ▶ $(k\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v})[2\pi]$ si $k > 0$, et $(k\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi[2\pi]$ si $k < 0$
- ▶ $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w})[2\pi]$
- ▶ $(k\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, k\vec{v})[2\pi]$

IV Les lignes trigonométriques

1 Lignes trigonométriques

Définition

- Soit M un point du cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ d'abscisse curviligne x et (D) la droite tangente à $(\mathcal{C})$ en I
- Le couple de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est $(\cos x, \sin x)$.
- Si $M \neq J$ et $M' \neq J'$ L'intersection de la droite (OM) et (D) est le point T dont l'abscisse dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est $\tan x$.

Propriété

Soit M un point du cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$, d'abscisse curviligne x . On a :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (propriété fondamentale)
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2 Lignes trigonométriques usuelles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

V Relation entre les lignes trigonométriques

1 Angles opposés

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

- | | | |
|-----------------------|------------------------|--|
| ► $\cos(-x) = \cos x$ | ► $\sin(-x) = -\sin x$ | ► $\tan(-x) = -\tan x$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ |
|-----------------------|------------------------|--|

• Exemple

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2

Angles supplémentaires et opposés supplémentaires propriété :

Propriété

pour $\cos(\pi - x) = -\cos x$

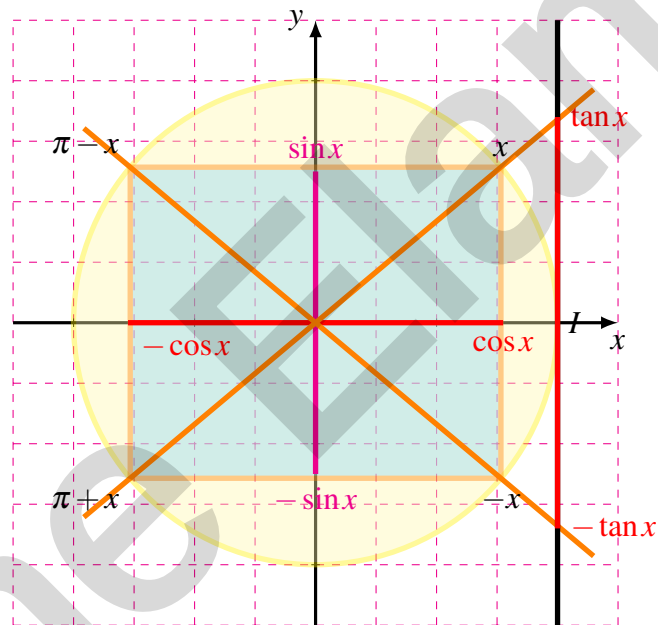
$$\cdot \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cdot \tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$\cdot \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$



• Exemple

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

3 Angles complémentaires et opposés complémentaires

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

• Exemple

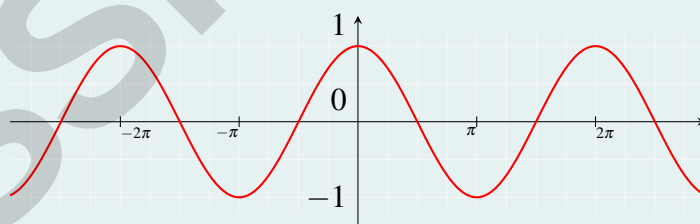
$$\cos \frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

VI La fonction cosinus

Définition

La fonction qui à tout nombre réel x , associe le nombre réel $\cos x$ est appelée fonction cosinus et notée $\cos$. A l'aide du logiciel geogebra on a construit sa courbe ci-contre.



Propriété

La fonction $\cos$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

- On a pour tout x de $\mathbb{R}$; $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ donc la fonction $\cos$ est périodique de période 2π .
- On a pour tout x de $\mathbb{R}$; $\cos(-x) = \cos x$; donc la fonction $\cos$ est paire.

le tableau de variation de la fonction $\cos$ sur $[-\pi, \pi]$:

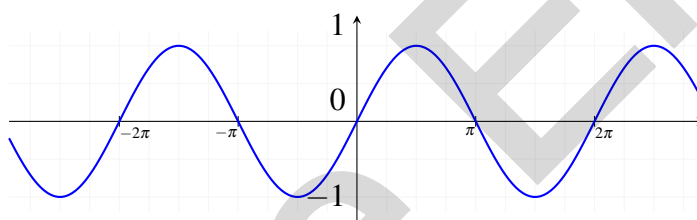
x	$-\pi$	0	π
$\cos x$	-1	1	1

VII La fonction sinus.

Définition

La fonction qui à tout nombre réel x , associe le nombre réel $\sin x$ est appelée la fonction sinus et notée $\sin$.

A l'aide du logiciel geogebra on a construit sa courbe ci-contre.



Propriété

La fonction $\sin$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ $-1 \leq \sin x \leq 1$.

- On a pour tout x de $\mathbb{R}$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ donc la fonction $\sin$ est périodique de période 2π
- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sin(-x) = -\sin x$ donc la fonction $\sin$ est impaire.

Le tableau de variation de la fonction $\sin$ sur $[-\pi, \pi]$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	-1	1	0

VIII Les équations trigonométriques fondamentales

Propriété

Si $|a| > 1$ alors les équations trigonométriques $\cos x = a$ et $\sin x = a$ n'ont pas de solutions.

- ▶ $\cos x = \cos \alpha$ équivaut à $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- ▶ $\sin x = \sin \alpha$ équivaut à $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\tan x = \tan \alpha$ équivaut à $x = \alpha + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Cas particuliers :

- ▶ $\cos x = -1$ équivaut à $x = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\cos x = 1$ équivaut à $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\sin x = -1$ équivaut à $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\sin x = 1$ équivaut à $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

• Exemple

- ▶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$

donc $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

D'où l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- ▶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On a : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$

donc $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = (\pi - \frac{\pi}{4}) + 2k\pi$

donc $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

D'où l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- ▶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\tan x = \sqrt{3}$

La fonction $\tan$ est définie si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

On a : $\tan x = \sqrt{3}$ équivaut à $\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$

donc $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ D'où l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Propriété

- ▶ $\cos x \geq \cos \alpha$ si et seulement si : $-\alpha + 2k\pi \leq x \leq \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\cos x > \cos \alpha$ et seulement si : $-\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- ▶ $\cos x \leq \cos \alpha$ si et seulement si : $x \in]-\pi + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi] \cup [\alpha + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$ / $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\cos x < \cos \alpha$ si et seulement si : $x \in]-\pi + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi[\cup]\alpha + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$ / $k \in \mathbb{Z}$

Propriété

- ▶ $\sin x \geq \sin \alpha$ si et seulement si : $\alpha + 2k\pi \leq x \leq \pi - \alpha + 2k\pi$ / $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\sin x > \sin \alpha$ et seulement si : $\alpha + 2k\pi < x < \pi - \alpha + 2k\pi$ / $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\sin x \leq \sin \alpha$ et seulement si : $x \in [-\pi + 2k\pi, \alpha + 2k\pi] \cup [\pi - \alpha + 2k\pi, \pi]$ / $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\sin x < \sin \alpha$ si et seulement

$$ix \in [-\pi + 2k\pi, \alpha + 2k\pi[\cup]\pi - \alpha + 2k\pi, \pi + 2k\pi] / k \in \mathbb{Z}$$

Propriété

- ▶ $\tan x \geq \tan \alpha$ si et seulement si $\alpha + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ / $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\tan x > \tan \alpha$ si et seulement si $\alpha + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ / $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\tan x \leq \tan \alpha$ si et seulement si $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \alpha + k\pi$ / $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ $\tan x < \tan \alpha$ si et seulement si $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha + k\pi$ / $k \in \mathbb{Z}$

• Exemple

- ▶ Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$

On a $\cos x \geq \frac{1}{2}$ si et seulement si $\cos x \geq \cos \frac{\pi}{3}$

d'après la figure ci - contre, la partie sur $[0, 2\pi]$ telle que $\cos x \geq \frac{1}{2}$ est la partie coloriée en bleu c'est à dire $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$

donc $S = [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$

- ▶ Résoudre sur $[0, \pi]$ l'inéquation $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

On a : $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $\sin x \leq \sin \frac{\pi}{4}$

D'après la figure ci - contre, la partie sur $[0, \pi]$ telle que $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ est la partie colorie en bleu c'est à dire $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$.

Donc $S = [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$