Les Fonctions Exponentielles

I Fonction exponentielle népérienne

1 Définition et propriétés

Activité

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)$

1. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} (notée exp) définie sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$; $exp(x)>0$
   - a. Calculer $\ln(exp(1))$; $\ln(exp(-3))$ et $exp\ln(1)$.
   - b. Déduire $\exp(0)$ et $exp(1)$
3. a. Construire les courbes $(C_{\ln})$ et $\left(C_{\exp}\right)$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   - b. Déterminer géométriquement $\lim x+\infty+\infty \exp(x)$ et $\lim x-\infty+\infty \exp(x)$.

D Définition

La fonction réciproque de la fonction $x\mapsto \ln(x)$ est appelée fonction exponentielle népérienne et on la note par exp, définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $]0,+\infty[$.

Propriété

- $(\forall x\in\mathbb{R})$; $(\ln(exp(x)))=x$
- $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $(exp(\ln(x)))=x$
- $(\forall x\in]0,+\infty[)$ $(\forall y\in\mathbb{R})$; $(\ln(x)=y \Leftrightarrow x=exp(y))=x$
- $(\forall x\in\mathbb{R})$; $exp(x)>0$
- $exp(0)=1$ et $exp(1)=e$

Propriété

La fonction $x\longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
Donc la fonction $x\longmapsto exp(x)$ est strictement sur $\mathbb{R}$

Conséquence

- $(\forall x\in\mathbb{R})$ $(\forall y\in\mathbb{R})$; $exp(x)=exp(y)\Leftrightarrow x=y$
- $(\forall x\in\mathbb{R})$ $(\forall y\in\mathbb{R})$; $exp(x)\leq exp(y)\Leftrightarrow x\leq y$

Application

Résolvons dans $\mathbb{R}$:

1. $(E_1) : exp(x+2) = exp(x^2-2x)$
2. $(I_1) : exp(x+2) \leq exp(x^2-2x)$
3. $(E_2) : \ln\left(x^2+x-1\right) = 3$
4. $(I_2) : \ln\left(x^2+x-1\right) > 3$

2 Écriture : e^x

Propriété

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q}) \qquad exp(rx) = (exp(x))^r$

Preuve

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q}) \quad \ln\left((exp(x))^r\right) = r\ln(exp(x)) = rx = \ln(exp(rx))$

Conséquence

- $(\forall r \in \mathbb{Q}) \qquad exp(r\times 1) = (exp(1))^r = e^r$
- On peut prolonger la propriété précédente à $\mathbb{R}$: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad exp(x) = (exp(1))^x = e^x$

3 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne

Propriété

La fonction $x \mapsto e^x$ est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on a :

1. $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\right); e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
2. $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\right); e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*[)(\forall y \in \mathbb{R}); e^y = x \Leftrightarrow y = \ln(x)$
4. $(\forall x \in \mathbb{R}); \ln(e^x) = x$
5. $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); e^{\ln(x)} = x$

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$
2. $e^{x^2-x} = 1$
3. $(e^x+2)\left(e^{-x+1}-4\right) \geq 0$
4. $e^{1-x} = e^{x-x^2}$
5. $(e^x)^2 - 3e^x + 2 < 0$
6. $e^{1-x} = e^{x-x^2}$
7. $(e^x)^2 - 3e^x + 2 < 0$

Propriété

Propriété caractéristique : $\boxed{\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right); e^{x+y} = e^x \cdot e^y}$

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$ et r de $\mathbb{Q}$ on a :

- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^r = e^{rx}$

Application

1 Simplifier les expressions :

a $A=\left(e^{2-x}\right)^2\times e^{3x-4}$ b $B=\frac{e^{2x}\times e^{3x}}{(e^x)^4}$

c $C=e^{2x}\left(\left(e^x+e^{-x}\right)^2+\left(e^x-e^{-x}\right)^2\right)$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a $(E_1): e^x+6e^{-x}-5=0$

b $(E_2): (e^x)^{15}\times e^{x^2+5}=\frac{e^{5x}}{e^4}$

c $(I_1): \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}>e^{-x+2}$

4 Limites usuelles

Propriété

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \quad (n\in\mathbb{N})$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x=0 \quad (n\in\mathbb{N})$

5 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Exemple

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-e^x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty$ Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=0$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-e^x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(e^x-1+\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$ Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ et $e^{2x}=(e^x)^2$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}=1$ Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

4 $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x^2+x-2}-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x^2+x-2}-1}{x^2+x-2}\times\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=2$

Car : $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x^2+x-2}-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$ (on pose $t=x^2+x-2$ si $x\mapsto1$ on a $t\mapsto0$)

et $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+2)(xx-1)}{x(x-1)}2$

Application

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x+4}{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3+3x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^{-x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-x}$
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{-1+e^x}$
6. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\ln\left(e^x-e^{\frac{1}{x}}\right)}{x}$

5 Dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$

Propriété

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=e^x$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad u'(x)=e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

• Preuve

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)$
f^{-1} la fonction réciproque de la fonction f $(f^{-1}(x)=e^x)$
f^{-1}est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

Application

Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=2x+e^x$
2. $f(x)=e^{-x}$
3. $f(x)=(x+1)^2\mathrm{e}^{-2x}$

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f:x\mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I est on a : $(\forall x\in I); f'(x)=u'(x)\cdot\mathrm{e}^{u(x)}$

Exemple

Déterminons la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x)=e^{x-2\ln(x+1)}$

Déterminons D_f l'ensemble de définition de la fonction f

$D_f=]-1,+\infty[$ (évident)

Comme la fonction $u:x\mapsto x-2\ln(x+1)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ (la somme de deux fonctions dérivable), alors la fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a :

$(\forall x \in]-1,+\infty[)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)e^{u(x)} \\ &= \left(1-\frac{2}{x+1}\right)e^{x-2\ln(x+1)} \\ &= \frac{(x-1)e^{x-2\ln(x+1)}}{x+1} \end{aligned}$$

Propriété

Soit u est une fonction dérivable sur un intervalle I.
L'ensemble des fonctions primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)\cdot \mathrm{e}^{u(x)}$ est $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Application

Déterminer l'ensemble des fonctions primitive de la fonction f définie par $f(x) = \left(x^2+1\right)e^{x^3+3x}$

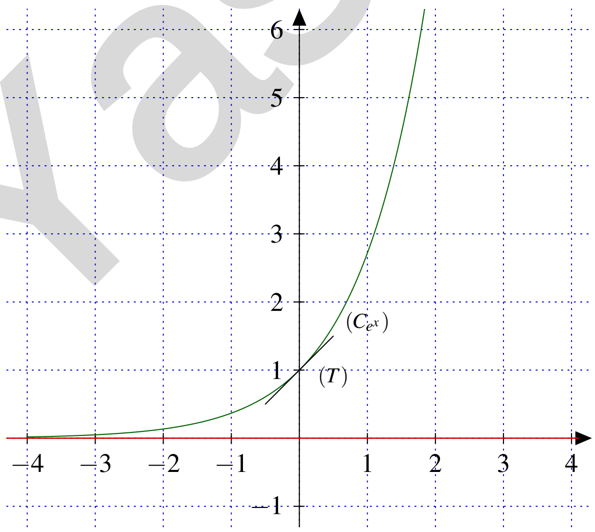
6 Étude et représentation graphique :

D'après la définition de la fonction $x \to \ln(x)$ on peut conclure que :
La fonction $x \to \ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
  Donc la courbe de la fonction $x \to e^x$ admet une asymptote horizontale d'équation "$y=0$"
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ Donc la courbe de la fonction $x \to e^x$ admet une branche parabolique vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

La courbe de la fonction $x \mapsto e^x$



$(T) : y = x+1$ est une droite tangente à la courbe (C_{e^x}) en $A(0,1)$

II Exponentielle de base a

1 Définition et résultats

Propriété

Soit a un réel strictement positif.
La fonction $\log_a$ étant continue et strictement monotone sur $]0,+\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R} = \log(]0,+\infty[)$ vers $]0,+\infty[$.
Cette fonction réciproque s'appelle fonction exponentielle de base a, se note $\exp_a$

Résultats immédiats :
Soit > 0 et $aa \neq 1$

- La fonction $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, \exp_a(x) > 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0,+\infty[)\,;\, \exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, \log_a(\exp_a(x)) = x$
- $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \exp_a(\log_a(x)) = x$

2 Écriture $e^{x\ln(a)}$

Propriété

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, \exp_a)(x) = e^{x\ln(a)}$

• Preuve

Posons : $y = \exp(x)$ on a donc $y > 0$ et $x = \log_a(y) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ D'où : $\ln(y) = x\ln(a)$; finalement $y = e^{x\ln(a)}$ d'où la propriété

Propriété

La fonction $x \to \exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})$ on a : $(\exp(x))' = \ln(a)e^{x\ln(a)}$

3 Monotonie et représentation

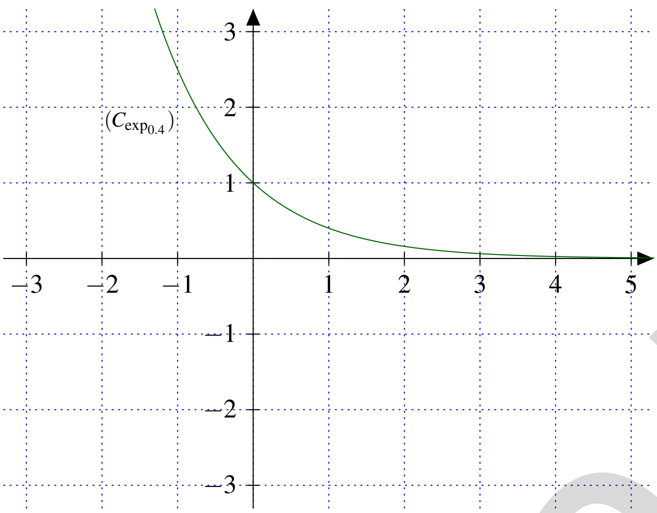
Soit a un réel strictement positif et différents de 1
On considère la fonction f_a définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_a(x) = \exp_a(x) = e^{x\ln(a)}$
La fonction $f_a$est dérivable sur $\mathbb{R}$ Donc $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = \ln(a)e^{x\ln(a)}$
Donc le signe de $f'_a(x)$ est le signe de $\ln(a)$ car : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $e^{x\ln(a)} > 0$

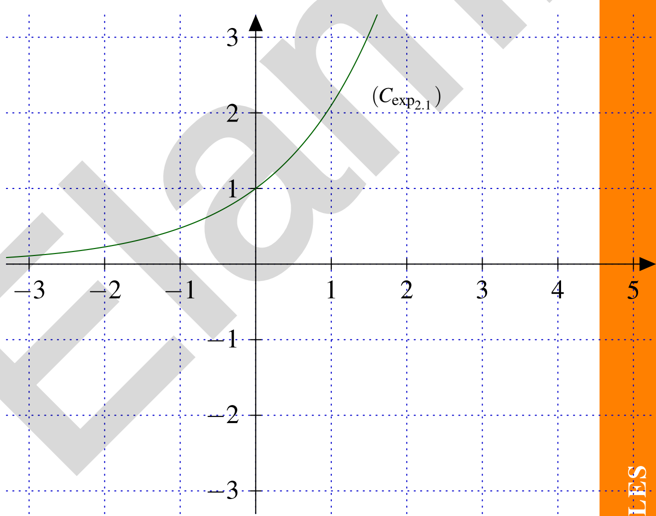
Si $a \in]0,1[$ alors $\ln(a) < 0$
Donc $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f_a'(x) < 0$,
Alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	$-\infty$

Si $a \in]1,+\infty$ alors $\ln(a) > 0$
Donc $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) > 0$,
Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	1 ↗	$+\infty$





Propriété

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a :

- $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$; $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$
- $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$; $\exp_a(x-y) = \frac{x}{\exp_a(y)}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})$; $(\exp_a(x))^r = \exp_a(rx)$

• Preuve

utiliser l'écriture $e^{x\ln(a)}$

4 Les puissances réelles

a Rappelle

- Puissance entier

Soit x un réel et n un entier naturel non nul on a :
$x^n = \underbrace{x \times x \times .... \times x}$ et $x^0 = 1$ si $x \neq 0$

n fois

- Puissance relatif
  $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- Puissance rationnelle
  $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall r \in \mathbb{Q}^*)\,;\, r = \frac{p}{q}\ \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$

b puissances réelles : Notation a^x

Soit a un réel strictement positif.

- Si $a = 1$, on pose pour tout réel $x > 0$: $a^x = 1$
- Si $a \neq 1$, on pose $a^x = e^{x\ln(a)}$

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3^x > 9^x$
Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$