Chapitre

Calcul intégrale

Exercice

Calculer les intégrales suivants

1. $I_1=\int_1^4(x-3)\mathrm{d}x$
2. $I_2=\int_{-2}^{-1}\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$
3. $I_3=\int_1^2 2(2x-1)^3\,\mathrm{d}x$
4. $I_4=\int_1^6\left(6x^3-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$
5. $I_5=\int_1^2\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
6. $I_6=\int_1^2\frac{x}{2x+1}\,\mathrm{d}x$
7. $I_7=\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^3\,\mathrm{d}x$
8. $I_8=\int_1^4\left(x^4-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$
9. $I_9=\int_1^9\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$
10. $I_{10}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$
11. $I_{11}=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$
12. $I_{12}=\int_{-1}^2\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
13. $I_{13}=\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
14. $I_{14}=\int_{-1}^2\frac{3x}{1+2x^2}\,\mathrm{d}x$
15. $I_{15}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x(1+\ln x)}\mathrm{d}x$
16. $I_{16}=\int_0^{\ln 3}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$
17. $I_{17}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$
18. $I_{18}=\int_1^4 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$
19. $I_{19}=\int_1^2\frac{3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
20. $I_{20}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$
21. $I_{21}=\int_1^8\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$
22. $I_{22}=\int_1^3(x|x-2|)\mathrm{d}x$
23. $I_{23}=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$
24. $I_{24}=\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$
25. $I_{25}=\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$
26. $I_{26}=\int_1^2\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

27 $I_{27}=\int_1^2\left(x^{\frac{-2}{5}}+x^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x$

28 $I_{28}=\int_0^1 x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

29 $I_{29}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

30 $I_{30}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

31 $I_{31}=\int_1^8(1+\sqrt[3]{x})^2\,\mathrm{d}x$

32 $I_{32}=\int_1^{\ln 3}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$

33 $I_{33}=\int_0^1\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$

34 $I_{34}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}\mathrm{d}x$

35 $I_{35}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)}{2+\sin(x)}\mathrm{d}x$

36 $I_{36}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x$

37 $I_{37}=\int_{-1}^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

38 $I_{38}=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

39 $I_{39}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x$

40 $I_{40}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$

41 $I_{41}=\int_{-1}^1(2x+3)\left(x^2+3x+4\right)^3\,\mathrm{d}x$

42 $I_{42}=\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}}(3x-1)\sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$

43 $I_{43}=\int_0^2(x-1)\sqrt{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$

44 $I_{44}=\int_0^1\frac{e^{2x}-e^x+3}{2e^x}\,\mathrm{d}x$

45 $I_{45}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{3+\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$

46 $I_{46}=\int_1^4\left(2x+\frac{1}{x}-3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

47 $I_{47}=\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{3-\cos(x)}\mathrm{d}x$

48 $I_{48}=\int_1^4\sqrt{x}\left(x^2+x+1\right)\mathrm{d}x$

49 $I_{49}=\int_1^2(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x})x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x$

50 $I_{50}=\int_1^{\mathrm{e}}\left((x+1)e^{x^2+2x+3}\right)\mathrm{d}x$

51 $I_{51}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)e^{\cos(x)}\mathrm{d}x$

52 $I_{52}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}\mathrm{d}x$

53 $I_{53}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{(1+\sin^2 x)^3}\,\mathrm{d}x$

54 $I_{54}=\int_0^{\pi}(1+\cos x)^2\times\sin x\,\mathrm{d}x$

55 $I_{55}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\times\sin x\,\mathrm{d}x$

56 $I_{56}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\times\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

57 $I_{57}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3(x)+\tan(x)\mathrm{d}x$

Exercice

On utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes

$$\begin{array}{lclcl}
I_1=\int_1^{e}\ln x\,\mathrm{d}x & ; & I_2=\int_1^{e}x\ln x\,\mathrm{d}x & ; & I_3=\int_1^{3}\left(x^2-2x\right)\ln x\,\mathrm{d}x\\
I_4=\int_1^{e^2}|1-\ln x|\mathrm{d}x & ; & I_5=\int_1^{2}\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x & ; & I_6=\int_1^{e}\ln^2 x\,\mathrm{d}x\\
I_7=\int_0^{3}(x-1)^2e^{2x}\,\mathrm{d}x & ; & I_8=\int_0^{\ln 2}x\left(e^{2x}+e^{-x}\right)\mathrm{d}x & ; & I_9=\int_0^{1}(2x+1)^2e^{-x}\,\mathrm{d}x\\
I_{10}=\int_0^{\ln 2}xe^{2x}\,\mathrm{d}x & ; & I_{11}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,\mathrm{d}x & ; & I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\times\ln(1+\cos x)\mathrm{d}x
\end{array}$$

Exercice

1 Montrer que $H:x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive pour $h:x\mapsto\ln x$

2 Montrer que : $\int_1^{e}\ln x\,\mathrm{d}x=1$

3 On utilisant une intégration par partie, montrer que : $\int_1^{e}\ln^2 x\,\mathrm{d}x=e-2$

Exercice

1 Déterminer les fonctions primitives de la fonction : $x\mapsto 2x\left(x^2-1\right)^{2022}$

2 Vérifeir que : $\int_1^{\sqrt{2}}2x\left(x^2-1\right)^{2022}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2023}$

3 On utilisant une intégration par partie, montrer que : $\int_0^{2}(2x+1)\ln(x+1)\mathrm{d}x=6\ln 3-2$

Exercice

1 a Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ \frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$

b Calculer : $\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

2 a Déterminer a et b de façon que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\});\ \frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$

b Calculer l'intégrale : $\int_{-3}^{2} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

3 a Déterminer a et b de façon que : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;1\})$; $\frac{x^2+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x+1)^2}$

b Calculer l'intégrale : $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+3}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice

Soit n un entier naturel. On pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\pi x} \sin x \,\mathrm{d}x$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\pi x} \cos x \,\mathrm{d}x$

1 Calculer I_o et J_o

2 On utilisant une intégration par partie, montrer que : $I_n + nJ_n = 1$ et $nI_n - J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$

3 Déduire I_n et J_n en fonction de n

Exercice

1 Déterminer une primitive pour la fonction $(x \in \mathbb{R}^+)\,; h(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$

2 Montrer que : $\int_0^2 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 + 1$

3 Montrre que : $\int_0^2 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = 1$